

УДК 517.51

Қолжазба құқығында

КЕРВЕНЕВ ҚАБЫЛҒАЗЫ ЕРЖЕПҰЛЫ

**Басым аралас тегістігі бар Никольский-Бесов кеңістігінің енулері
және олардың қосымшалары**

8D05401 – «Математика»

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесшілер:
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор
К.А. Бекмаганбетов;
PhD, Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды
университетінің қауымдастырылған
профессоры
С.А. Искаков

Шетелдік ғылыми кеңесші
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор
Г.А. Чечкин
(Ресей)

Қазақстан Республикасы
Қарағанды, 2025

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ	4
1 $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ БАСЫМ АРАЛАС ТУЫНДЫСЫ ЖӘНЕ АРАЛАС МЕТРИКАСЫ БАР НИКОЛЬСКИЙ-БЕСОВ КЕҢІСТІГІ ҮШІН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛЫҚ ҚАСИЕТТЕР МЕН ЕНУЛЕР ТЕОРЕМАЛАРЫ	20
1.1 $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігінің анықтамасы және олардың интерполяциясы	20
1.2 $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігі үшін әртүрлі метрикалардағы енулер теоремалары .	25
1.3 $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігі үшін іздер мен жалғасу теоремалары	31
2 $S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)$ БАСЫМ АРАЛАС ТУЫНДЫСЫ ЖӘНЕ АРАЛАС МЕТРИКАСЫ БАР НИКОЛЬСКИЙ-БЕСОВ КЕҢІСТІГІ ҮШІН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛЫҚ ҚАСИЕТТЕР МЕН ЕНУЛЕР ТЕОРЕМАЛАРЫ	36
2.1 $S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)$ кеңістігінің интерполяциясы	36
2.2 $S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)$ кеңістігі үшін әртүрлі метрикалардың енулер теоремалары	39
2.3 $S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)$ кеңістігі үшін іздер мен жалғасу теоремалары	42
3 АНИЗОТРОПТЫ ЖӘНЕ АРАЛАС МЕТРИКАЛЫ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ ЖУЫҚТАУ ТЕОРИЯСЫНЫҢ КЕЙБІР ЕСЕПТЕРІ	48
3.1 Никольский-Бесов класының ортопроекциялық көлденеңдерінің реттері туралы	47
3.2 Никольский-Бесов класының тригонометриялық көлденеңінің реті туралы	54
ҚОРЫТЫНДЫ	64
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ІДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ	65
ҚОСЫМША А – Диссертация тақырыбы бойынша жарияланған жұмыстар тізімі	70

НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР

Диссертациялық жұмыста келесідей мемлекеттік үлгі қалыптарға сілтемелер жасалды:

ҚР МЖМС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім. Докторантура. Негізгі ережелері (өзгертілген 2012 жылғы 23 тамыз №1080).

Ғылыми дәрежелерді беру ережелері 31 наурыз 2011 ж. №127.

ҰМҒТСО 7.32-2011. Мемлекетаралық стандарттар (өзгертілген 2006 ж.).

ҰМҒТСО 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Құрастырудың жалпы талаптары мен ережелері.

КІРІСПЕ

Зерттеу жұмысының өзектілігі

Ену теоремалары, іздер және жалғастырулар туралы теоремалар математиканың әртүрлі салаларында және оның қосымшаларында, соның ішінде жуықтау теориясы, математикалық физиканың шекаралық есептер теориясы, сандық әдістер және басқа бағыттарда маңызды зерттеу құралы болып табылады.

Дифференциалданатын функциялар кеңістігін ену теориясы С.Л.Соболевтің [1] еңбегінен бастау алады. Бұл теория әртүрлі метрикалардағы функциялардың дифференциалдық (тегістік) қасиеттері арасындағы негізгі байланыстар мен қатынастарды зерттейді. Оның әрі қарай дамуы жаңа функционалдық кеңістіктердің зерттелуімен байланысты, бұл С. М. Никольский [2, 3], О.В. Бесов [4], П.И. Лизоркин [5], Х. Требель [6] және басқа да ғалымдардың еңбектерінде көрініс тапты.

1960-жылдардан бастап басым аралас туындысы бар кеңістіктерді белсенді зерттеу басталды. Бұл бағытта С.М. Никольский [7], А.Д. Джабраилов [8] және Т.И. Аманов [9, 10] алғашқылардың бірі болып зерттеу жүргізді. Басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар кеңістіктер А.П. Унинскийдің [11, 12] еңбектерінде жан-жақты қарастырылды. Бұл кеңістіктерге қызығушылық ұзақ уақыт бойы сақталып келді, әсіресе жуықтау теориясы есептерімен байланысты мәселелерде. Бұл бағыттың дамуына В.Н. Темляков [13], А.С. Романюк [14] – [16], Е.Д. Нурсултанов [17] – [19], Г.А. Акишев [20] – [22], Д.Б. Базарханов [23], Н.Т. Тлеуханова [24], К. А. Бекмаганбетов және Е. Төлеуғазы [25] – [31] айтарлықтай үлес қосты.

Осы диссертациялық жұмыс аталған саладағы зерттеулерді жалғастырады. Тақырыптың өзектілігі әр айнымалы бойынша әртүрлі метрикалық қасиеттері бар тегіс функциялар кеңістіктерінің (аралас метрика негізінде құрылған кеңістіктер) әлі толық зерттелмегендігімен байланысты. Бұл мәселе осындай кеңістіктерді зерттеу аппаратының салыстырмалы түрде жақында ғана дамытылуымен және оның әлі де қарқынды дамып келе жатқандығымен түсіндіріледі.

Диссертация аясында басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістіктерінің теориясы әзірленіп, оның жуықтау теориясының есептерін зерттеуге қолданылуы көрсетіледі. Соңғы уақытта жуықтау теориясының әдістері жасанды интеллект алгоритмдерін әзірлеуде қолданылатынын ерекше атап өткен жөн.

Жұмыстың мақсаты. Басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістігі үшін интерполяциялық қасиеттерді зерттеу, енулер теоремаларын, іздер мен жалғасу туралы теоремаларын алу. Лоренцтің анизотропты кеңістіктерінің метрикасындағы Никольский-Бесов кластарының ортопроекциялық және тригонометриялық көлденеңдерінің ретін табу.

Зерттеудің жалпы әдістері. Интерполяция теориясы, тригонометриялық көпмүшелер және экспоненциалды типтегі бүтін функциялар үшін әртүрлі метрика мен өлшемдер теңсіздіктері сияқты функциялар мен функционалдық

талдау теорияларының әдістері, ену теориялары және гармоникалық талдау әдістері қолданылады.

Ғылыми жаңалығы. Жұмыста келесі жаңа ғылыми нәтижелер алынған:

1. Басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістігі үшін интерполяциялық кеңістіктер сипатталған.

2. Басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістіктері және анизотропты Лоренц кеңістіктері үшін жақсартылмайтын шекті ену теоремалары алынды.

3. Басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістіктері үшін іздер және жалғасы туралы теоремалар алынды.

4. Басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов класының ортопроекциялық көлденеңінің ретін дәл бағалауы алынды.

5. Анизотропты Лоренц кеңістіктер метрикасында басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов класының тригонометриялық көлденеңінің ретін дәл бағалауы алынды.

Зерттеудің негізгі нәтижелерінің сипаттамасы. Диссертацияның бірінші бөлімінде, T^n торында берілген периодты көп айнымалылы функциялар жағдайындағы, басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістіктері зерттеледі. Мұнда осындай кеңістіктер үшін анизотропты интерполяция әдісіне қатысты интерполяциялық теорема алынды. Қарастырылған кеңістіктер мен анизотропты Лоренц кеңістіктері үшін әр түрлі метрикалық енулердің шекті теоремалары дәлелденді, олардың жақсартылмайтындығы көрсетілді; іздер және жалғасу туралы теоремалары дәлелденді.

Диссертацияның екінші бөлімінде \mathbb{R}^n кеңістігінде анықталған функциялар жағдайында басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістіктері үшін бірінші бөлімге аналогиялық есептер зерттеледі. Диссертацияның үшінші бөлімінде басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістіктерінде жуықтау теорияларының екі есебі қарастырылады. Атап айтқанда, кейбір кластар мен кеңістік параметрлерінің арақатынасы үшін анизотропты Лоренц кеңістіктер метрикасында басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов класының ортопроекциялық және тригонометриялық көлденеңінің ретін дәл бағалауы есептелді.

Алынған нәтижелердің жағашылдығы мен маңыздылығы. Диссертацияда алынған нәтижелердің барлығы жаңа. Олардың ғылыми маңыздылығы анизотропты сипаттағы функциялар теориясын одан әрі дамыту және осындай функцияларды зерттеудің жаңа аппаратын жасау болып табылады. Жұмыс теориялық фундаментальды сипатта, ал оның нәтижелері математиканың басқа бөлімдері мен оның қосымшаларында (математикалық физика тендеулеріне арналған шеткі есептері, жуықтау теориялары мен есептеу математикасы) әртүрлі қолданыстар табады.

Жұмыстың басқа ғылыми зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс мемлекеттік бюджеттен қаржыландырылатын жобаның

аясында орындалған:

AP08855579 «Функционалдық кеңістіктер және жуықтау теориясының және дифференциалдық теңдеулердің аралас мәселелері»;

AP19677486 «Функционалды кеңістіктер теориясындағы және жуықтау теориясындағы анизотропты мәселелер».

Диссертациялық зерттеу тақырыбы «Жаратылыстаны ғылымдары» ғылым бағыты бойынша «Елдің зияткерлік әлеуеті» басым бағытына, «математика, механика, астрономия, физика, химия, биология, информатика және география саласындағы іргелі және қолданбалы зерттеулер» мамандандырылған ғылыми бағытына сәйкес келеді.

Жариялымдар. Диссертацияның негізгі нәтижелері 12 жұмыста [32] – [43] жарияланды (8 мақала және 4 тезис). Оның ішінде 4 мақала Web of Science Core Collection және Scopus базасына кіретін журналдарда (3 мақала 35-тен астам процентиі бар журналдарда), 4 тезис халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында.

1. Order of the trigonometric widths of the Nikol'skii-Besov classes with mixed metric in the metric of anisotropic Lorentz spaces // Bulletin of the Karaganda university- Mathematics. -2020. Vol. 97, №1. -P. 17-26. (ҒЖБССҚК).

2. Interpolation theorem for Nikol'skii-Besov type spaces with mixed metric// Bulletin of the Karaganda university- Mathematics.-2020. Vol. 100, №4. -P. 33-42. (ҒЖБССҚК).

3. The embedding theorems for anisotropic Nikol'skii-Besov spaces with generalized mixed smoothness// Bulletin of the Karaganda university- Mathematics.-2021. Vol. 104, №4. - P. 28-34. (ҒЖБССҚК).

4. Estimate for the order of orthoprojection width of the Nikol'skii-Besov class in the metric of anisotropic Lorentz spaces// Journal of Mathematical Sciences.-2022. Vol. 264, No. 5. – P. 552-561 (Scopus, процентиі 18).

5. The theorems about traces and extensions for functions from Nikolsky-Besov spaces with generalized mixed smoothness//Bulletin of the Karaganda university- Mathematics. – 2022. Vol. 108, № 4. - P. 42-50 (Scopus, процентиі 35).

6. About unimprovability the embedding theorems for anisotropic Nikol'skii-Besov spaces with dominated mixed derivatives and mixed metric and anisotropic Lorentz spaces// Bulletin of the Karaganda university-Mathematics. - 2024 114 (2) , pp.186-196 (Web of Science (ESCI Q2), Scopus, процентиі - 46) DOI10.31489/2024M2/186-196.

7. Жалпыланған аралас тегістігі бар Никольский–Бесов кеңістігінің шекаралық функциялары.// Абай атындағы ҚазҰПУ-нің ХАБАРШЫСЫ, «Физика-математика ғылымдары» сериясы.- 2025.-1(89). Б. 76-83. (ҒЖБССҚК). DOI: 10.51889/2959-5894.2025.89.1.007.

8. Nikol'skii-Besov spaces with a dominant mixed derivative and with a mixed metric: interpolation properties, embedding theorems, trace and extension theorems// Eurasian Mathematical Journal, - 2025. -№2 (16), pp. 30–41. (Web of Science (ESCI Q2), Scopus, процентиі - 67) DOI: <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2025-16-2-30-41>.

Сонымен бірге, жұмыстың жеке нәтижелері келесі ғылыми семинарларда талқыланды:

1. Функционалдық анализ және оның қолданулары ғылыми семинарларында (жетекшілері ҚР ҰҒА академиктері М. Өтелбаев және Р. Ойнаров, профессор Е.Д. Нурсултанов, К.Н. Оспанов).

2. Математиканың қазіргі мәселелері ғылыми семинарында (жетекшілері профессор Е.Д. Нурсултанов, профессор К.А. Бекмаганбетов М.В.Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Қазақстан филиалы).

3. Дифференциалды операторлар және олардың қосымшалары (жетекші профессор М.И. Рамазанов. Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті).

4. Орташалау теориясы мен қолдану әдістері ғылыми семинарында (жетекші профессор Г.А. Чечкин. М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті).

5. Квази сызықты қарапайым дифференциалдық тендеулер шешімдерінің сапалық қасиеттері ғылыми семинарында (жетекші профессор И.В.Асташова. М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті).

Халықаралық конференциялар материалдары.

1. Теорема вложения для пространств Никольского–Бесова со смешанной метрикой// Традиционная межд. апрельская науч. конф. в честь Казахстанского дня работников науки, посвященная 75-летию академика Т.Ш.Кальменова: Тезисы докладов.-Алматы, 2021.- С.20-21.

2. Интерполяционные свойства и теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского–Бесова с обобщенной смешанной гладкостью.// Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 30-летию Независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала Московского университета. Нур-Султан, 4 июня 2021 г.-С. 72-76.

3. Теоремы о следах и продолжении для пространств Никольского-Бесова со смешанной метрикой в анизотропных пространствах Лоренца// Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. Материалы IX международной научной конференций. Актобе, 24-28 мая 2022 г. -С. 119-121.

4. Пространства Никольского-Бесова с доминирующей смешанной производной и со смешанной метрикой: теоремы вложения разных метрик и измерений.//Международная научно-практическая конференция «анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» посвященная 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук, профессора Т.И. Аманова. Астана, 22-23 июня 2023 г. -С. 21-24.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері келесі конференцияларда баяндалды:

1. Академик Т.Ш.Кальменовтың 75 жылдығына және Қазақстандық ғылым қызметкерлері күніне орай арналған Дәстүрлі халықаралық сәуір ғылыми конференциясы. – Алматы, 2021.

2. Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики», посвященная 30-летию Независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала Московского университета. – Астана, 2021.

3. «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері» ІХ Халықаралық ғылыми конференция. – Ақтөбе, 2022.

4. Международная научно-практическая конференция «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения», посвященная 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук, профессора Т.И. Аманова. – Астана, 2023.

Докторанттың әрбір жариланымды дайындауға қосқан үлесі. Диссертацияның негізгі нәтижелері 11 жұмыста жарияланды. Ғылыми кеңесшілермен және қосалқы авторлармен бірлесіп жазылған 11 жұмысында ғылыми кеңесшілер есептің қойылымын қойып, зерттеу әдістемесін таңдады, ал докторант негізгі және көмекші нәтижелерді өз бетінше тұжырымдап, оларды дәлелдеді.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертация кіріспеден, үш тараудан, қорытынды мен пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Теоремалар мен формулалардың нөмірленуі үш таңбалы: бірінші сан бөлім нөмірін, екінші сан- бөлім пунктін, үшіншісі – пункт ішіндегі теоремалар мен формулалардың меншікті нөмірі. Пайдаланылған әдебиеттер тізімінде 61 атау бар. Диссертация көлемі – 72 бет.

Жұмыстың негізгі мазмұны. Кіріспеде тақырыптың өзектілігі мен жаңалығы негізделеді, зерттеудің мақсаттары мен міндеттері, объектісі, пәні тұжырымдалады.

Бірінші бөлімде T^n торында берілген периодты көп айнымалылы функциялар жағдайындағы, басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістіктері зерттеледі.

Айталық $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$ болсын. Аралас метрикадағы $L_p(T^n)$ Лебег кеңістігі деп

$$\|f\|_{L_p(T^n)} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\dots \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

нормасы шекті болатын T^n -да өлшемді барлық $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ функциялар жиынын айтамыз, мұнда $p_i = \infty$ болғанда $\left(\int_0^{2\pi} |f(x_i)|^{p_i} dx_i \right)^{\frac{1}{p_i}}$ өрнегі $\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq x_i \leq 2\pi} |f(x_i)|$ ретінде түсініледі.

Сондай-ақ, бізге келесі $l_q^\alpha(A)$ векторлы-мәнді тізбекті кеңістіктері қажет болады.

Айталық $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ болсын. $l_q^\alpha(A)$

арқылы A -да мәндері жататын

$$\|a\|_{l_q^\alpha(A)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (2^{(\alpha, k)} \|a_k\|_A)^q \right)^{1/q}$$

нормасы шекті болатын $\{a_k\}_{k \in \mathbb{R}^n}$ мультитізбекті белгілейміз, мұндағы $(\alpha, k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j k_j$ – скаляр көбейтіндісі.

Әрі қарай, біз басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігін анықтаймыз.

Айталық $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ және $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ болсын.

$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{i(k, x)}$ тригонометриялық қатары үшін

$$\Delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k, x)}$$

арқылы белгілейміз, мұндағы $\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : [2^{s_i-1}] \leq |k_i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n\}$.

[17, с. 2 – 3; 21, с. 26-30] аналогия бойынша, басым аралас туындысы және аралас метрикадасы бар Никольский-Бесов кеңістігі $B_p^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^n)$ деп

$$\|f\|_{B_p^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^n)} = \left\| \left\{ \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right\} \right\|_{l_q^\alpha}$$

нормасы шекті болатын $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{i(k, x)}$ қатарлар жиынын айтамыз.

Ескерту 1.1.1. Никольский-Бесовтың осылайша анықталған анизотропты кеңістігі $B_p^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^n)$ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ және $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. А.Д.Джабраилов және Т.И. Амановтың (қараңыз [8, с. 255-256; 9, с. 8-30]), $p = (p_1, \dots, p_n)$ және $\tau = (\infty, \dots, \infty)$ А.П. Унинскидің (қараңыз [11, с. 806-808; 12, с. 159-170]) еңбектерінде қарастырылған $S_{p\tau}^\alpha B(\mathbb{T}^n)$ кеңістігіне сәйкес келеді.

Келесі лемма Никольский-Бесовтың кеңістіктерінің қарапайым енулерін көрсетеді.

Лемма 1.1.1. Айталық $-\infty < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) \leq \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \infty$, $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \leq q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$ және $1 \leq p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \infty$ болсын, онда

$$B_{p_0}^{\alpha_0 q_0}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_{p_1}^{\alpha_1 q_1}(\mathbb{T}^n).$$

Сондай-ақ, бізге Е.Д. Нурсултановтың жұмысында енгізілген Лоренцтің анизотропты кеңістігінің анықтамасы қажет болады [17, с.1-3].

Анықтама 1.1.1. Айталық $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ функциясы \mathbb{T}^n – де өлшемді функция болсын. $f^*(t) = f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$ арқылы, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$

функциясына x_1, \dots, x_n мульти айнымалылары бойынша тізбектей, қалған айнымалылары тұрақты болғандағы, өспейтін алмастыруды қолдану арқылы алынған функцияны белгілейік.

Айталық $p = (p_1, \dots, p_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ мультииндекстері, егер $1 \leq p_i < \infty$, онда $1 \leq r_i \leq \infty$, ал егер $p_i = \infty$, онда және $r_i = \infty$, $i = 1, \dots, n$ болатындай болсын.

Лоренцтің $L_{pr}(\mathbb{T}^n)$ анизотропты кеңістігі деп келесі шама шекті болатын функциялар жиынын айтамыз

$$\|f\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^n)} = \left(\int_0^{2\pi} \left(t_n^{\frac{1}{p_n}} \dots \left(\int_0^{2\pi} \left(t_n^{\frac{1}{p_n}} f^{*_{1, \dots, *n}}(t_1, \dots, t_n) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{r_2}{r_1}} \dots \right)^{\frac{r_n}{r_{n-1}}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{r_n}}.$$

$r_i = \infty$ болғанда $\left(\int_0^{2\pi} |f(t_i)|^{r_i} \frac{dt_i}{t_i} \right)^{1/r_i}$ өрнегі $\sup_{0 \leq t < 2\pi} |f(t_i)|$ ретінде түсініледі.

Интерполяцияның анизотропты әдісінің анықтамасын берейік.

Айталық $E = \{0,1\}^n$. $A = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – банах кеңістігінің үйлесімді жиынтығы деп аталатын кейбір сызықтық хаусдорф кеңістігінің ішкі кеңістігі болып табылатын банах кеңістігінің жиынтығы [44]. $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$ кеңістігінің a элементі үшін функционалды анықтайық

$$K(t, a; A) = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon},$$

мұндағы $t^\varepsilon = t_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\varepsilon_n}$.

Айталық $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, $0 < r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. $A_{\theta r} = (A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{\theta r}$ арқылы $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$ жиынының сызықтық жиынын белгілейміз, оның элементтері үшін келесі теңдік дұрыс:

$$\|a\|_{A_{\theta r}} = \left(\int_0^\infty \left(t_n^{-\theta_n} \dots \left(\int_0^\infty \left(t_n^{-\theta_1} K(t, a; A) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty.$$

Лемма 1.1.2 ([17, с.1-4]). Айталық $0 < \theta < 1$, $0 < r \leq \infty$, $A = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$, $B = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – банах кеңістігінің екі үйлесімді жиынтығы. Егер кез келген $\varepsilon \in E$ үшін, $C_\varepsilon \leq \prod_{i=1}^n M_i^{\varepsilon_i}$ норма бағалаумен, сызықтық оператор үшін $T: A_\varepsilon \rightarrow B_\varepsilon$ орын алатындай оң компоненттері бар $M_0 = (M_1^0, \dots, M_n^0)$ $M_1 = (M_1^1, \dots, M_n^1)$ екі вектор бар болса, онда

$$T: A_{\theta r} \rightarrow B_{\theta r},$$

және

$$\|T\|_{A_{\theta r} \rightarrow B_{\theta r}} \leq \max_{\varepsilon \in E} C_{\varepsilon} \prod_{i=1}^n (M_i^0)^{1-\theta_i} (M_i^1)^{\theta_i}.$$

Мультииндекстер $b_0 = (b_1^0, \dots, b_n^0)$, $b_1 = (b_1^1, \dots, b_n^1)$ және $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ үшін $b_{\varepsilon} = (b_1^{\varepsilon_1}, \dots, b_n^{\varepsilon_n})$ белгілеуін енгізейік.

Лемма 1.1.3 ([17, с.1-4]). Айталық $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \infty$, $p_{\varepsilon} = (p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon \in E$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq r \leq \infty$. Онда

$$(L_{p_{\varepsilon}}(\mathbb{T}^d); \varepsilon \in E)_{\theta r} = L_{pr}(\mathbb{T}^d)$$

теңдігі дұрыс, мұндағы $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Анықтама 1.1.2. Айталық A және B – екі нормаланған банах кеңістігі болсын. Егер $RS = E$ ($L(B, B)$ - дегі тепе-тең оператор) болатындай $S \in L(B, A)$ операторы бар болса, онда $R \in L(A, B)$ операторы ретракция деп аталады.

Бұл жағдайда S операторы коретракция (R -ге сәйкес) деп аталады.

Лемма 1.1.4. Айталық $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ және $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Онда $B_p^{\alpha r}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігі $l_q^{\alpha}(L_p(\mathbb{T}^n))$ кеңістігінің ретракциясы болады.

Никольский-Бесовтың анизотропты кеңістіктерінің интерполяция әдісіне қатысты интерполяциялық қасиеттерін көрсетейік.

Теорема 1.1.2. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$, $q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$. Онда $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ және $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ үшін

$$(B_p^{\alpha_{\varepsilon} q_{\varepsilon}}(\mathbb{T}^n); \varepsilon \in E)_{\theta q} = B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n),$$

теңдігі орындалады, мұндағы $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Ескерту 1.1.2. Никольский-Бесовтың және Лизоркин-Трибельдің изотроптық кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттері И.Асекритованың, Н.Кругляктың, Л.Малигранданың, Л.Николованың және Л.Е.Персонның [44], К.А.Бекмағанбетов және Е.Д.Нұрсұлтановтың [45], В.Л.Крепкорскидің [46, 47], Д.Петрениң [48], К.А.Бекмағанбетовтың [49] және басқа авторлардың еңбектерінде зерттелген.

Әрі қарай, Никольский-Бесов $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігі үшін әртүрлі метрикалардың ену теоремаларын келтіреміз.

Теорема 1.2.1. Айталық $-\infty \leq \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) <$

∞ , $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, $p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$.
Егер $\alpha_0 - 1/p_0 = \alpha_1 - 1/p_1$ болса, онда келесі енуі орынды

$$B_{p_1}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_{p_0}^{\alpha_0 q}(\mathbb{T}^n).$$

Теорема 1.2.2. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$. Егер $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$B_p^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow L_{q\tau}(\mathbb{T}^n).$$

Теорема 1.2.3. Айталық $1 < q = (q_1, \dots, q_n) < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$. Егер $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$L_{q\tau}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_p^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^n).$$

1.2.1 – 1.2.3 теоремаларындағы енулер дұрыс болатындай шарттар жақсартылмайды. Атап айтқанда келесі тұжырымдар орындалады:

Тұжырым 1.2.1. Айталық $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$, $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, $p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$, және $\alpha_0 - \frac{1}{p_0} = \alpha_1 - \frac{1}{p_1}$. Онда кез келген $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ және $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) > 0$ үшін, $f_\beta^{(1)} \notin B_{p_0}^{(\alpha_0 + \varepsilon)\tau}(\mathbb{T}^n) \cup B_{(p_0 + \delta)}^{\alpha_0 \tau}(\mathbb{T}^n)$ болатындай $f_\beta^{(1)} \in B_{p_1}^{\alpha_1 \tau}(\mathbb{T}^n)$ функция бар болады.

Тұжырым 1.2.2. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ және $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болсын. Онда кез келген $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ үшін $f_\beta^{(2)} \notin L_{q+\varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^n)$ болатындай $f_\beta^{(2)} \in B_p^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^n)$ функция бар болады.

Тұжырым 1.2.3. Айталық $1 < q = (q_1, \dots, q_n) < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ және $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болсын. Онда кез келген $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ және $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) > 0$ үшін, $f_\beta^{(3)} \notin B_p^{\alpha + \varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^n) \cup B_{(p + \delta)}^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^n)$ болатындай $f_\beta^{(3)} \in L_{q, \tau}(\mathbb{T}^n)$ функция бар болады.

Бұл бөлімшеде біз Никольский-Бесов кеңістіктері үшін іздер және жалғасулар теоремаларын аламыз.

Көп индексті $p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n)$ үшін $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ белгілеуін енгізейік.

Бұл бөлімде біз жалпыланған аралас тегістігі бар Никольский-Бесов кеңістігіндегі функциялардың ізі мен жалғасы туралы теоремалардың қасиеттерін дәлелдейміз.

Теорема 1.3.1. Айталық, $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$. Егер

$\alpha_i = 1/p_i$, $q_i = 1$ мұндағы $i = m + 1, \dots, n$ болса, онда келесідей ену орындалады

$$B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{q}}(\mathbb{T}^m).$$

Ескерту 1.3.1. $\alpha_i > 1/p_i$ мұндағы $i = m + 1, \dots, n$, үшін дәлелденген басым аралас туындысы бар Никольский-Бесов [12, с. 162-169; 13, с. 27-65; 14, р. 254-270; 15, р. 380-390] кеңістігіндегі функциялар үшін іздер теоремасының айырмашылығы, 1.3.1 теоремада $\alpha_i > 1/p_i$ шектік жағдай $q_i = 1$ шарты бойынша $i = m + 1, \dots, n$ үшін қарастырылады, (бұл жағдай бұрындары қарастырылған, мысалы [16, с. 75-80; 17, с. 2-4]).

Теорема 1.3.2. Айталық $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$. Онда $\alpha_i = 1/p_i$ және $q_i = 1$, $i = m + 1, \dots, n$, кезінде $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{q}}(\mathbb{T}^m)$ функциясы үшін, келесі қасиеттерге ие болатын $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ функциясын құруға болады

$$f \in B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n),$$

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)} \leq C \|\varphi\|_{B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{q}}(\mathbb{T}^m)},$$

$$f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m).$$

Ескерту 1.3.2. Теорема 1.3.2 дәлелдеуінде тұрғызылған жалғасу операторы сызықтық екенін ескереміз. Бұл жерде В.И. Буренков пен М.Л. Гольдманның [50] - [51] еңбектерінде классикалық анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктері үшін шектеуші жағдайда тек сызықтық емес жалғасу операторын құруға болатынын атап өткен жөн, бірақ бұл әсер басым аралас туындысы бар Никольский-Бесов кеңістіктері үшін байқалмайды.

Айталық $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ болсын, онда келесі жиынды анықтаймыз

$$\Omega_a = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_j < x_j < 2a_j, j = 1, \dots, n\}.$$

$M = (M_1, \dots, M_n) \in \mathbb{Z}^n$ параметрі үшін Валле-Пуссен ядросының аналогын қарастырайық. Ол келесі жолмен анықталады:

$$V_M(t) = \frac{1}{\prod_{j=1}^n M_j} \int_{\Omega_M} \prod_{j=1}^n \frac{\sin \lambda_j t_j}{t_j} d\lambda.$$

Айталық $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$ көп индексті болсын. Аралас метрикалы $L_p(\mathbb{R}^n)$ Лебег кеңістігі - бұл келесі норма шекті болатын өлшемді функциялар жиынтығы

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{1/p_n}.$$

мұндағы, $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ өрнегі $p = \infty$ үшін $\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ ретінде түсіндіріледі.

Егер кейбір $\rho_0 > 0$ үшін

$$I_{\rho_0} f = F \in L_p(\mathbb{R}^n),$$

мұндағы

$$I_{\rho_0} f = \mathfrak{F}^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{-\frac{\rho_0}{2}} \mathfrak{F}(f) \right)$$

болса, онда жалпыланған f функциясы $L_p(\mathbb{R}^n)$ мағынасында тұрақты деп аталады және \mathfrak{F} және \mathfrak{F}^{-1} сәйкесінше тура және кері Фурье түрлендіруі болып табылады.

Айталық f функциясы $L_p(\mathbb{R}^n)$ мағынасында тұрақты функция болсын. Онда f функцияның $L_p(\mathbb{R}^n)$ мағынасында тұрақты кеңеюі Валле-Пуссен қосындылары бойынша келесі теңдеумен анықталады

$$f = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} Q_s(f)$$

мұндағы

$$Q_s(f) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^n I_{-\rho} \left(\prod_{i=1}^n \left(V_{2^{s_i}}(x_i) - V_{[2^{s_i}-1]}(x_i) \right) * I_{\rho} f \right),$$

мұндағы $\rho > 0$ жеткілікті үлкен, сондықтан $I_{\rho} f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $V_M(t) = \frac{1}{M} \int_M^{2M} \frac{\sin \lambda t}{t} d\lambda$ параметр $M > 0$ және $V_0(t) \equiv 0$ үшін Валле-Пуссен ядросының аналогы болып табылады.

Айталық, ары қарай $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ және $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ болсын.

Басым аралас туындысы бар және аралас метрикасы бар $S_p^{\alpha, q} B(\mathbb{R}^n)$ Никольский-Бесов кеңістігі - келесі норма шекті болатын f функциясы үшін $L_p(\mathbb{R}^n)$ мағынасында тұрақты мәндердің жиыны болып табылады

$$\|f\|_{S_p^{\alpha, q} B(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^n} \right\|_{l_q},$$

мұндағы $(\alpha, s) = \sum_{j=1}^n \alpha_j s_j$ ішкі көбейтінді болады және $\|\cdot\|_{l_q}$ аралас метрикалы l_q дискретті Лебег кеңістігінің нормасы болып табылады.

Ескерту 2.1.1. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$ жағдайда, $q = (\infty, \dots, \infty)$ параметр үшін бұл кеңістіктер [11, с. 806-808] және [12, с. 159-170] еңбектерінде енгізіліп, зерттелді, ал $p = (p, \dots, p)$ және $q = (q, \dots, q)$ [7, с. 1345-1348; 8, с. 255-256; 9, с. 20-25] еңбегінде қарастырылған. Бұл кеңістіктердің перодты аналогтары [33, с. 33-42; 34, с. 29-32; 36, с. 42-47] жұмыстарында зерттелген.

Келесі леммада басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістігінің элементар енулері көрсетілген.

Лемма 2.1.1. а) Айталық $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \leq q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$ болсын, мұндағы

$$S_p^{\alpha q_0} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha q_1} B(\mathbb{R}^n).$$

б) Айталық $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$ және $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0), q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$ болсын, мұндағы

$$S_p^{\alpha_1 q_1} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha_0 q_0} B(\mathbb{R}^n).$$

Айталық көп индексті $p = (p_1, \dots, p_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ болсын. Егер $1 \leq p_i < \infty$ болса, онда $1 \leq r_i \leq \infty$, ал егер $p_i = \infty$ болса, онда $r_i = \infty$ ($i=1, \dots, n$).

$L_{pr}(\mathbb{R}^n)$ анизотропты Лоренц кеңістігі бұл келесі функциялар жиынтығы

$$\|f\|_{L_{pr}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_0^\infty \left(t_n^{1/p_n} \dots \left(\int_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty,$$

мұндағы $f^*(t) = f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$ үлкейтілмейтін қайталанатын $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ функцияларының ауыстыруын көрсетеді.

Теорема 2.1.1. Айталық $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$, $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \neq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \neq q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ болсын. Содан кейін $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ және $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ үшін

$$(S_p^{\alpha \varepsilon q \varepsilon} B(\mathbb{R}^n); \varepsilon \in E)_{\theta_q} = S_p^{\alpha q} B(\mathbb{R}^n),$$

мұндағы $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Теорема 2.2.1. Айталық $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ және $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0), p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$ болсын. Егер $\alpha_0 - \frac{1}{p_0} = \alpha_1 - \frac{1}{p_1}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$S_{p_1}^{\alpha_1 \tau} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_{p_0}^{\alpha_0 \tau} B(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.2.2. Айталық $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$ және $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ болсын. Егер $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$S_p^{\alpha \tau} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{q\tau}(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.2.3. Айталық $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ және $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ болсын. Егер $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$L_{q\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha \tau} B(\mathbb{R}^n).$$

Ескерту 2.2.1. 2.2.1 – 2.2.3 теоремалардың шарттары жақсартылмайтындығын көрсетуге болады.

Бұл бөлімде жалпыланған аралас туындысы және анизотропты Лоренц кеңістіктері бар Никольский-Бесов кеңістігіндегі функциялардың іздері мен жалғасы туралы теоремалар дәлелденеді.

$a = (a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$ үшін $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ және $\tilde{a} = (a_{m+1}, \dots, a_n)$ арқылы белгілейік.

Теорема 2.3.1. Айталық $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots, \tau_n) \leq \infty$, $1 \leq p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$.

Онда $\alpha_i = 1/p_i$ және $\tau_i = 1$, мұндағы $i = m+1, \dots, n$, үшін келесі енулер орындалады

$$S_p^{\alpha \tau} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha} \bar{\tau}} B(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.3.2. Айталық $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots, \tau_n) \leq \infty$, $1 \leq p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$ болсын. Онда $\alpha_i = 1/p_i$ және $\tau_i = 1$, мұндағы $i = m+1, \dots, n$, мәндерінде $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha} \bar{\tau}} B(\mathbb{R}^m)$ функция үшін келесі қасиеттерге ие болатын $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ функциясын құруға болады:

$$f \in S_p^{\alpha \tau} B(\mathbb{R}^n);$$

$$\|f\|_{S_p^{\alpha \tau} B(\mathbb{R}^n)} \leq C_5 \|\varphi\|_{S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha} \bar{\tau}} B(\mathbb{R}^m)};$$

$$f(\cdot, \dots, \cdot, 0, \dots, 0) = \varphi(\cdot, \dots, \cdot).$$

Бұл бөлімшеде $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$ шартымен Никольский-Бесов $B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ класының $L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ анизотропты Лоренц кеңістігінің метрикасында ортопроекциялық көлденеңдеріне бағалаулар алынды.

Айталық, $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ – кеңістіктегі ортонормальды функциялар жүйесі $L_2(\mathbb{T}^n)$ және V – нормаланған кеңістік, болсын. Әрбір $f \in V$ функцияға $\sum_{i=1}^M (f, u_i)u_i(x)$ түріндегі жуықтау аппаратын сәйкес қоямыз, яғни $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ функциялар жүйесімен құрылған $L_2(\mathbb{T}^n)$ ішкі кеңістігіне, $f(x)$ функциясының ортогональ проекциясын сәйкес қоямыз. Егер $F \subset V$ – қандай да бір функционалды класс болса, онда

$$d_M^\perp(F, V) = \inf_{\{u_i(x)\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \|f(\cdot) - \sum_{i=1}^M (f, u_i)u_i(\cdot)\|_V \quad (3.1.1)$$

шамасы V кеңістігінде осы кластың ортопроекциялық көлденеңі деп аталады. $d_M^\perp(F, V)$ көлденеңін В.Н.Темляков енгізген болатын [52].

Сонымен қатар, параллельді түрде, В.Н.Темляков [53] қарастырған $d_M^B(F, V)$, шамаларын зерттедік. Олар келесідей анықталады

$$d_M^B(F, V) = \inf_{G \in \mathfrak{L}_M(B)_V} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_V \quad (3.1.2)$$

Мұнда, шарттарды қанағаттандыратын, барлық сызықтық операторлардың жиынтығы $\mathfrak{L}_M(B)_V$ арқылы белгіленген:

а) осы операторлардың $D(G)$ анықтау облысы барлық тригонометриялық полиномдарды қамтиды және олардың мәндер облысы M өлшемді V кеңістігінің ішкі кеңістігінде жатады;

б) барлық $k = (k_1, \dots, k_n)$ векторлары үшін

$$\|Ge^{2\pi i(k,x)}\|_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leq B$$

теңсіздігі орындалатындай, $B \geq 1$ саны бар болады.

$$d_M^B(F, V) \leq d_M^\perp(F, V). \quad (3.1.3)$$

болатынын көру оңай.

Демек, $d_M^B(F, V)$ шамаларының төменгі бағалары $d_M^\perp(F, V)$ ортопроекциялық көлденеңдерінің төменгі жағындағы бағалар ретінде қызмет ете алады және керісінше - $d_M^\perp(F, V)$ ортопроекциялық көлденеңдердің жоғарғы бағаларын $d_M^B(F, V)$ шамаларын жоғарыдан бағалау үшін пайдалануға болады. Бұл жағдайды біз төмендегі тиісті мәлімдемелерді дәлелдеу кезінде қолданамыз.

$V = L_q(\mathbb{T}^n)$ болғанда, ал F орнына $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^n)$, $H_p^r(\mathbb{T}^n)$, $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^n)$ изотропты кластар қарастырылған жағдайда көлденеңдердің мұндай түрлері В.Н. Темляковтың [52, р. 620-621; 53, р. 162-190], Э.М. Галеевтің [54]-[55], А.В.

Андреанов және В.Н. Темляковтың [56], А.С. Романюктің [14, р. 256-270; 15, р. 380-390; 16, с. 72-85] (изотропты кеңістіктер мен кластар) еңбектерінде зерттелді.

$V = L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ – Лоренцтің анизотропты кеңістігі жағдайында, ал F – анизотропты $H_{p\theta}^r(\mathbb{T}^n)$ немесе $B_{p,\theta}^{r\tau}(\mathbb{T}^n)$ кластардың бірі жағдайлар үшін бұл көлденеңдер Г.А. Ақышевтің [20, с. 18-30], К.А. Бекмаганбетов және Е. Төлеуғазы [31, с. 237-247] жұмыстарында зерттелген.

Біз келесі теореманы алдық:

Теорема 3.1.1. Айталық $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $1 \leq \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$, $\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0} = \min\{\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j : j = 1, \dots, n\} > 0, D = \{\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j = \alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0} : j = 1, \dots, n\}$, $j_1 = \min\{j : j \in D\}$ және $q_j = q_{j_0}$, $\theta_j \leq \tau_j$ егер $j \in D$ болса. Онда

$$d_M^\perp(B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n), L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)) \asymp d_M^B(B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n), L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)) \asymp M^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0})} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0}) + \sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/\theta_j - 1/\tau_j)}, \quad (3.1.4)$$

мұндағы $|D|$ – жиын D элементтерінің саны.

Бұл бөлімшеде $L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ Лоренцтің анизотропты кеңістіктерінің метрикасында, $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < 2 < q = (q_1, \dots, q_n)$ шарты бойынша, $B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ Никольский-Бесов класының тригонометриялық көлденеңінің реті бағаланады

Айталық $V \subset L_1(\mathbb{T}^n)$ – нормаланған кеңістік және $F \subset V$ – қандай да бір функционалдық класс. V кеңістігінде F класының тригонометриялық көлденеңі келесі түрде анықталады

$$d_M^T(F, V) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Omega_M; x)} \|f(\cdot) - t(\Omega_M; \cdot)\|_V,$$

мұндағы $t(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k_j, x)}$, $\Omega_M = \{k^1, \dots, k^M\}$ – бүтінсанды \mathbb{Z}^n тордағы $k^j = (k_1^j, \dots, k_n^j)$ векторлар жиынтығы, c_j – қандай да бір сандар ($j = 1, \dots, M$).

Бір өлшемді жағдайда тригонометриялық көлденең ұғымын алғаш рет Р.С.Исмагилов енгізді [57] және ол үздіксіз функциялар кеңістігіндегі кейбір кластар үшін оның бағаларын белгіледі. L_q кеңістігінде W_p^r Соболев, H_p^r Никольский кластарында көп айнымалылы функциялардың тригонометриялық көлденеңдерінің дәл реттерін Э.С. Белинский [58], В.Е. Майоров [59], Ю. Маковоз [60], Г.Г. Магарил-Ильяев [61], В.Н. Темляков [53, р. 162-182] орнатты. Бұл есепті Бесов кластары үшін А.С. Романюк [16, с. 72-86], Д.Б. Базарханов [23, с. 54-64] зерттеді. Никольский-Бесовтың анизотропты кластары жағдайында бұл есепті К.А. Бекмаганбетов және Е. Төлеуғазы [31, с. 237-247] зерттеді.

Біз $L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ Лоренцтің анизотропты кеңістіктерінің метрикасындағы

$B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ Никольский-Бесов класының тригонометриялық көлденеңдерінің ретін бағалау есептерін зерттейміз.

Теорема 3.2.1. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < 2 < q = (q_1, \dots, q_n) < p'_0 = (p'_0, \dots, p'_0)$, $p_0 = \max\{p_j: j = 1, \dots, n\}$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \leq \infty$ және $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ бұл, барлық $j = 1, \dots, n$ үшін $\alpha_j > 1 + 1/p_j - 1/p_0$. Айталық, әрі қарай, $q_j = q_{j_1}$ барлық $j \in D$ үшін және $q_j \geq q_{j_1}$ барлық $j \notin D$ үшін $\zeta = \min\{\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j: j = 1, \dots, n\}$, $D = \{j = 1, \dots, n: \alpha_j - 1/p_j + 1/q_j = \zeta\}$, $j_1 = \min\{j: j \in D\}$ болсын.

Онда келесі қатынас дұрыс болады

$$d_M^T(B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n), L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)) \asymp M^{-(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/2)} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/2) + \sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/2 - 1/\tau_j)_+}, \quad (3.2.4)$$

мұндағы $|D| - D$ жиынының элементтер саны, $a_+ = \max(a; 0)$.

Ескерту 3.2.2. $p = r = (p, \dots, p)$, $\tau = (\tau, \dots, \tau)$, және $q = \theta = (q, \dots, q)$ кезінде, дәлелденген теореманың тұжырымы А.С.Романюк жұмысының нәтижесімен сәйкес келетінін айта кетеміз.

1 $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ БАСЫМ АРАЛАС ТУЫНДЫСЫ ЖӘНЕ АРАЛАС МЕТРИКАСЫ БАР НИКОЛЬСКИЙ-БЕСОВ КЕҢІСТІГІ ҮШІН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛЫҚ ҚАСИЕТТЕР МЕН ЕНУЛЕР ТЕОРЕМАЛАРЫ

Біз бұл бөлімде $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ басым аралас туынды және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістігі үшін интерполяциялық қасиеттер мен енулер теоремаларын қарастырдық.

1.1 $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігінің анықтамасы және олардың интерполяциясы

Бұл бөлімде қажетті анықтамалар мен көмекші мәлімдемелер келтірілген, басым аралас туынды және аралас метрикадағы Никольский-Бесов кеңістігі енгізілген, осы кеңістіктердің интерполяциялық қасиеттері зерттелген.

Айталық $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$ болсын. Аралас метрикадағы $L_p(\mathbb{T}^n)$ Лебег кеңістігі деп

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\dots \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

нормасы шекті болатын \mathbb{T}^n -да өлшемді барлық $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ функциялар жиынын айтамыз, мұнда $p_i = \infty$ болғанда $\left(\int_0^{2\pi} |f(x_i)|^{p_i} dx_i \right)^{\frac{1}{p_i}}$ өрнегі $\text{ess sup}_{0 \leq x_i \leq 2\pi} |f(x_i)|$ ретінде түсініледі.

Сондай-ақ, бізге келесі $l_q^\alpha(A)$ векторлы-мәнді тізбекті кеңістіктері қажет болады.

Айталық $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ болсын. $l_q^\alpha(A)$ арқылы A -да мәндері жататын

$$\|a\|_{l_q^\alpha(A)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (2^{(\alpha, k)} \|a_k\|_A)^q \right)^{1/q}$$

нормасы шекті болатын $\{a_k\}_{k \in \mathbb{R}^n}$ мультитізбекті белгілейміз, мұндағы $(\alpha, k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j k_j$.

Әрі қарай, біз басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігін анықтаймыз.

Айталық $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ және $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ болсын.

$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{i(k,x)}$ тригонометриялық қатары үшін

$$\Delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k,x)}$$

арқылы белгілейміз, мұндағы $(k, x) \sum_{i=1}^n k_i^p x_i^p$ скаляр көбейтінді, $\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n: [2^{s_i-1}] \leq |k_i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n\}$.

[17, с. 2 – 3; 21, с. 26-30] аналогия бойынша, басым аралас туындысы және аралас метрикадасы бар Никольский-Бесов кеңістігі $B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ деп

$$\|f\|_{B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)} = \left\| \left\{ \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right\} \right\|_{l_q^\alpha}$$

нормасы шекті болатын $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{i(k,x)}$ қатарлар жиынын айтамыз.

Ескерту 1.1.1. Никольский-Бесовтың осылайша анықталған анизотропты кеңістігі $B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ және $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. А.Д. Джабраилов және Т.И. Амановтың (қараңыз [8, с. 255-256; 9, с. 8-30], А.П. Унинскидің [11, с. 806-808; 12, с. 159-170]) еңбектерінде қарастырылған $S_{p\tau}^\alpha B(\mathbb{T}^n)$ кеңістігіне сәйкес келеді.

Келесі лемма Никольский-Бесовтың кеңістіктерінің қарапайым енулерін көрсетеді.

Лемма 1.1.1. Айталық $-\infty < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) \leq \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \infty$, $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \leq q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$ және $1 \leq p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \infty$ болсын, онда

$$B_{p_0}^{\alpha_0 q_0}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_{p_1}^{\alpha_1 q_1}(\mathbb{T}^n).$$

Дәлелдеуі $l_q^\alpha(A)$ және $L_p(\mathbb{T}^n)$ кеңістіктерінің қасиеттерінен шығады.

Сондай-ақ, бізге Е.Д. Нурсултановтың жұмысында енгізілген Лоренцтің анизотропты кеңістігінің анықтамасы қажет болады [17, с. 1-3].

Анықтама 1.1.1. Айталық $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ функциясы \mathbb{T}^n – де өлшемді функция болсын. $f^*(t) = f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$ арқылы, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ функциясына x_1, \dots, x_n мульти айнымалылары бойынша тізбектей, қалған айнымалылары тұрақты болғандағы, өспейтін алмастыруды қолдану арқылы алынған функцияны белгілейік.

Айталық $p = (p_1, \dots, p_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ мультииндекстері, егер $1 \leq p_i < \infty$, онда $1 \leq r_i \leq \infty$, ал егер $p_i = \infty$, онда және $r_i = \infty$, $i = 1, \dots, n$ болатындай болсын.

Лоренцтің $L_{pr}(\mathbb{T}^n)$ [13, с. 2-3] анизотропты кеңістігі деп келесі шама шекті болатын функциялар жиынын айтамыз

$$\|f\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^n)} =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \left(t_n^{\frac{1}{r_n}} \dots \left(\int_0^{2\pi} \left(t_n^{\frac{1}{r_n}} f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{r_2}{r_1}} \dots \right)^{\frac{r_n}{r_{n-1}}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{r_n}}.$$

$r_i = \infty$ болғанда $\left(\int_0^{2\pi} |f(t_i)|^{r_i} \frac{dt_i}{t_i} \right)^{1/r_i}$ өрнегі $\sup_{0 \leq t < 2\pi} |f(t_i)|$ ретінде түсініледі.

Интерполяцияның анизотропты әдісінің анықтамасын берейік.

Айталық $E = \{0,1\}^n$. $A = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – банах кеңістігінің үйлесімді жиынтығы деп аталатын кейбір сызықтық хаусдорф кеңістігінің ішкі кеңістігі болып табылатын банах кеңістігінің жиынтығы. $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$ кеңістігінің a элементі үшін функционалды анықтайық

$$K(t, a; A) = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon},$$

мұндағы $t^\varepsilon = t_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t_n^{\varepsilon_n}$.

Айталық $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, $0 < r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$.

$A_{\theta r} = (A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{\theta r}$ арқылы $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$ жиынының сызықтық жиынын белгілейміз, оның элементтері үшін келесі теңдік дұрыс:

$$\|a\|_{A_{\theta r}} = \left(\int_0^\infty \left(t_n^{-\theta_n} \dots \left(\int_0^\infty \left(t_n^{-\theta_1} K(t, a; A) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty.$$

Лемма 1.1.2. ([17, с. 1-4]). Айталық $0 < \theta < 1$, $0 < r \leq \infty$, $A = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$, $B = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – банах кеңістігінің екі үйлесімді жиынтығы. Егер кез келген $\varepsilon \in E$ үшін, $C_\varepsilon \leq \prod_{i=1}^n M_i^{\varepsilon_i}$ норма бағалаумен, сызықтық оператор үшін $T: A_\varepsilon \rightarrow B_\varepsilon$ орын алатындай оң компоненттері бар $M_0 = (M_1^0, \dots, M_n^0)$ $M_1 = (M_1^1, \dots, M_n^1)$ екі вектор бар болса, онда

$$T: A_{\theta r} \rightarrow B_{\theta r},$$

және

$$\|T\|_{A_{\theta r} \rightarrow B_{\theta r}} \leq \max_{\varepsilon \in E} C_\varepsilon \prod_{i=1}^n (M_i^0)^{1-\theta_i} (M_i^1)^{\theta_i}.$$

Мультииндекстер $b_0 = (b_1^0, \dots, b_n^0)$, $b_1 = (b_1^1, \dots, b_n^1)$ және $\varepsilon =$

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ үшін $b_\varepsilon = (b_1^{\varepsilon_1}, \dots, b_n^{\varepsilon_n})$ белгілеуін енгізейік.

Лемма 1.1.3. ([17 с. 1-4]). Айталық $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \infty$, $p_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon \in E$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq r \leq \infty$. Онда

$$(L_{p_\varepsilon}(\mathbb{T}^d); \varepsilon \in E)_{\theta r} = L_{pr}(\mathbb{T}^d)$$

теңдігі дұрыс, мұндағы $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Теорема 1.1.1. Айталық $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \neq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $\varepsilon \in E$, $\alpha_\varepsilon = (\alpha_1^{\varepsilon_1}, \dots, \alpha_n^{\varepsilon_n})$, $1 \leq q_\varepsilon = (q_1^{\varepsilon_1}, \dots, q_n^{\varepsilon_n}) \leq \infty$. Онда $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ үшін

$$(l_{q_\varepsilon}^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E)_{\theta q} = l_q^\alpha(A)$$

теңдігі дұрыс, мұндағы $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Анықтама 1.1.2. Айталық A және B – екі нормаланған банах кеңістігі болсын. Егер $RS = E$ ($L(B, B)$ - дегі тепе-тең оператор) болатындай $S \in L(B, A)$ операторы бар болса, онда $R \in L(A, B)$ операторы ретракция деп аталады.

Бұл жағдайда S операторы коретракция (R -ге сәйкес) деп аталады.

Лемма 1.1.4. Айталық $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ және $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Онда $B_p^{\alpha r}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігі $l_q^\alpha(L_p(\mathbb{T}^n))$ кеңістігінің ретракциясы болады.

Дәлелдеуі. 1 қадам. $f \in B_p^{\alpha r}(\mathbb{T}^n)$ функциясы үшін S операторын келесі түрде анықтаймыз

$$Sf = \{\Delta_s(f, x)\}_{s \in \mathbb{Z}_+^n} = \{(\Delta_s * f)(x)\}_{s \in \mathbb{Z}_+^n},$$

мұндағы $\Delta_s(x)$ деп отырғанымыз $\rho(s)$ блогына сәйкес Дирихле ядросы.

Онда анықтамаға сай алатынымыз

$$\|Sf\|_{l_q^\alpha(L_p(\mathbb{T}^n))} = \|\{\Delta_s(f, \cdot)\}\|_{l_q^\alpha(L_p(\mathbb{T}^n))} = \|f\|_{B_p^{\alpha r}(\mathbb{T}^n)},$$

бұл S -қасиетінің орындалатынын көрсетеді.

2 қадам. $f = \{f_s(x)\}_{s \in \mathbb{Z}_+^n}$ тізбегі үшін

$$Rf = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} (\Delta_s * f_s)(x)$$

операторын анықтаймыз.

Онда М. Рисстің параллелепипедті бөлік қосындыларының шектеулілігі туралы теңсіздігіне сай, алатынымыз:

$$\|\Delta_m * f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)},$$

мұндағы C – абсолютті тұрақты, және ары қарай

$$\begin{aligned} \|Rf\|_{B_p^{\alpha, \tau}(\mathbb{T}^n)} &= \|\{(\Delta_s * f_s) * \Delta_s\}\|_{l_q^\alpha(L_p(\mathbb{T}^n))} = \\ &= \|\{\Delta_s * f_s\}\|_{l_q^\alpha(L_p(\mathbb{T}^n))} \leq C \|\{f_s\}\|_{l_q^\alpha(L_p(\mathbb{T}^n))} = \\ &= C \|f\|_{l_q^\alpha(L_p(\mathbb{T}^n))}. \end{aligned}$$

Соңғы теңсіздік R -қасиетінің орындалуын білдіреді.

3 қадам. $RS = E$ болатынын көрсетеміз. Анығында

$$\begin{aligned} RSf(x) &= R(\Delta_s(f, x)) = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} (\Delta_s(f, x) * \Delta_s(x)) = \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} ((S_{2^s} - S_{2^{s-1}}) * f)(x) = f(x). \end{aligned}$$

Лемма толық дәлелденді.

Никольский-Бесовтың анизотропты кеңістіктерінің интерполяция әдісіне қатысты интерполяциялық қасиеттерін көрсетейік.

Теорема 1.1.2. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$, $q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$. Онда $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ және $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ үшін

$$(B_p^{\alpha_\varepsilon, q_\varepsilon}(\mathbb{T}^n); \varepsilon \in E)_{\theta, q} = B_p^{\alpha, q}(\mathbb{T}^n),$$

теңдігі орындалады, мұндағы $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Дәлелдеуі Лемма 1.1.2 мен теорема 1.1.1 нәтижелерінен шығады.

Ескерту 1.1.2. Никольский-Бесовтың және Лизоркин-Трибельдің изотроандық кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттері И.Асекритованың, Н.Кругляктың, Л.Малиграндтың, Л.Николованың және Л.Е.Персонның [44], К.А.Бекмағанбетов және Е.Д.Нұрсұлтановтың [45], В.Л.Крепкорскидің [46, 47], Д.Петренің [48], К.А.Бекмағанбетовтың [49] және басқа авторлардың еңбектерінде зерттелген.

1.2 $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігі үшін әртүрлі метрикалардағы енулер теоремалары

Лемма 1.2.1. ([2, с. 245-247]) Айталық, $x = (x_1, \dots, x^1, \dots, x^n, \dots, x_n)$ мультитайнымалылары бойынша реті $s = (s_1, \dots, s_n)$ аспайтын $T_s(x)$ тригонометриялық полином болсын. Онда $1 \leq p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq p_2 = (p_1^2, \dots, p_n^2) < \infty$ кезінде келесі теңсіздік орындалады

$$\|T_s\|_{L_{p_2}(\mathbb{T}^n)} \leq C \prod_{\{i: p_i^1 < p_i^2\}} S_i^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_s\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^n)}, \quad (1.2.1)$$

мұндағы C – s - ке тәуелсіз оң мәнді тұрақты.

Әрі қарай, Никольский-Бесов $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігі үшін әртүрлі метрикалардың ену теоремаларын келтіреміз.

Теорема 1.2.1. Айталық $-\infty \leq \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0), p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$. Егер $\alpha_0 - 1/p_0 = \alpha_1 - 1/p_1$ болса, онда келесі енуі орынды

$$B_{p_1}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_{p_0}^{\alpha_0 q}(\mathbb{T}^n).$$

Дәлелдеуі. Айталық $f \in B_{p_1}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^n)$, онда әр түрлі метрикалар теңсіздігіне сай (лемма 1.2.1) бағалау аламыз

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p_0}^{\alpha_0 q}(\mathbb{T}^n)} &= \left\| \left\{ 2^{(\alpha_0, s)} \|\Delta_s(f)\|_{L_{p_0}(\mathbb{T}^n)} \right\} \right\|_{l_q} \leq \\ &\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{(\alpha_0 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}, s)} \|\Delta_s(f)\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^n)} \right\} \right\|_{l_q} = \\ &= C_1 \left\| \left\{ 2^{(\alpha_1, s)} \|\Delta_s(f)\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^n)} \right\} \right\|_{l_q} = C_1 \|f\|_{B_{p_1}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^n)}, \end{aligned}$$

бұл ізделінді енуді дәлелдейді.

Теорема 1.2.2. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$. Егер $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$B_p^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow L_{q\tau}(\mathbb{T}^n).$$

Дәлелдеуі. Әртүрлі метрикалар теңсіздігі (лемма 1.3.1) мен Минковский теңсіздігіне сай, алатынымыз

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{T}^n)} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(f) \right\|_{L_q(\mathbb{T}^n)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\Delta_k(f)\|_{L_q(\mathbb{T}^n)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k} \|\Delta_k(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} = \|f\|_{B_p^{\alpha_1}(\mathbb{T}^n)},$$

мұндағы $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Сонымен, $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болғанда $B_p^{\alpha_1}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{T}^n)$ енуі орындалады.

Біз $p = (p_1, \dots, p_n)$ бекітеміз, және де $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$ және $q_i = (q_1^i, \dots, q_n^i)$. параметрлерін $\alpha_j^i = \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^i}$, $i = 0, 1, j = 1, \dots, n$. Болатындай етіп таңдаймыз онда кез келген $\varepsilon \in E$ үшін алатынымыз

$$B_p^{\alpha_{\varepsilon 1}}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow L_{q_{\varepsilon}}(\mathbb{T}^n).$$

1.1.3 леммасы және 1.1.2 теоремасына сай, алатынымыз

$$(B_p^{\alpha_{\varepsilon 1}}(\mathbb{T}^n); \varepsilon \in E)_{\theta, \tau} \hookrightarrow (L_{q_{\varepsilon}}(\mathbb{T}^n); \varepsilon \in E)_{\theta, \tau}$$

немесе

$$B_p^{\alpha_{\tau}}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{T}^n),$$

мұндағы $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

α , p және q параметрлері арасындағы қатынасты тексерейік

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = (1 - \theta)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0}\right) + \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}\right) = \\ &= \left(\frac{1 - \theta}{p} + \frac{\theta}{p}\right) - \left(\frac{1 - \theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}\right) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right). \end{aligned}$$

Теорема дәлелденді.

Теорема 1.2.3. Айталық $1 < q = (q_1, \dots, q_n) < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$. Егер $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$L_{q\tau}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_p^{\alpha_{\tau}}(\mathbb{T}^n).$$

Дәлелдеуі. Әр түрлі метрикалардың теңсіздіктері (лемма 1.3.1) және параллелепипедті бөлік қосындылардың шектеулілігі туралы М.Рисс теоремасына сәйкес

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_p^{\alpha\infty}(\mathbb{T}^n)} &= \sup_{k \geq 0} 2^{(\alpha,k)} \|\Delta_k(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \leq \\ &\leq C_1 \sup_{k \geq 0} 2^{(\alpha + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}, k)} \|\Delta_k(f)\|_{L_q(\mathbb{T}^n)} = C_1 \sup_{k \geq 0} \|\Delta_k(f)\|_{L_q(\mathbb{T}^n)} \leq C_2 \|f\|_{L_q(\mathbb{T}^n)}, \end{aligned}$$

себебі $\alpha = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Сонымен, $\alpha = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ болғанда

$$L_q(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_p^{\alpha\infty}(\mathbb{T}^n)$$

енуі орындалады.

$p = (p_1, \dots, p_n)$ бекітеміз, және де $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$ және $q_i = (q_1^i, \dots, q_n^i)$ параметрлерін $\alpha_j^i = \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^i}$, $i = 0, 1, j = 1, \dots, n$ болатындай етіп таңдаймыз. Онда кез келген $\varepsilon \in E$ үшін, алатынымыз

$$L_{q_\varepsilon}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_p^{\alpha_\varepsilon\infty}(\mathbb{T}^n).$$

1.1.1 леммасы мен 1.1.2 теоремасына сай

$$(L_{q_\varepsilon}(\mathbb{T}^n); \varepsilon \in E)_{\theta, \tau} \hookrightarrow (B_p^{\alpha_\varepsilon\infty}(\mathbb{T}^n); \varepsilon \in E)_{\theta, \tau}$$

немесе

$$L_{q_\tau}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_p^{\alpha_\tau}(\mathbb{T}^n),$$

мұндағы $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

α, p , және q параметрлері арасындағы қатынасты тексерейік

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = (1 - \theta) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0} \right) + \theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1} \right) = \\ &= \left(\frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{p} \right) - \left(\frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \right) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right). \end{aligned}$$

Теорема дәлелденді.

1.2.1–1.2.3 теоремаларындағы енулер дұрыс болатындай шарттар жақсартылмайды. Атап айтқанда келесі тұжырымдар орындалады:

Тұжырым 1.2.1. Айталық $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$, $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0), p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$, және $\alpha_0 - \frac{1}{p_0} = \alpha_1 - \frac{1}{p_1}$. Онда кез келген $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ және $\delta = (\delta_1, \dots,$

$\delta_n) > 0$ үшін, $f_\beta^{(1)} \notin B_{p_0}^{(\alpha_0+\varepsilon)\tau}(\mathbb{T}^n) \cup B_{(p_0+\delta)}^{\alpha_0\tau}(\mathbb{T}^n)$ болатындай $f_\beta^{(1)} \in B_{p_1}^{\alpha_1\tau}(\mathbb{T}^n)$ функция бар болады.

Дәлелдеуі. Бір өлшемді Дирихле ядросының нормасы үшін болжамды ескере отырып, алатын қатынасымыз

$$\left\| \sum_{k=2^s-1}^{2^s-1} e^{i(k,\cdot)} \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \sim 2^{s/p'}, \quad 1 < p < +\infty.$$

Осы қатынастан бірнеше жағдайда бізде бары

$$\|\sigma_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} = \left\| \sum_{k=2^s-1}^{2^s-1} e^{i(k,\cdot)} \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \sim 2^{(1/p')} \quad (1.2.2)$$

$f_\beta^{(1)}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-(\beta,s)} \sigma_s(x)$ функцияны қарастайық, мұндағы

$$\alpha_1 + \frac{1}{p_1'} < \beta < \min\left(\alpha_0 + \varepsilon + \frac{1}{p_0'}, \alpha_0 + \frac{1}{(p_0+\delta)'}\right).$$

(1.2.2) бағалау бойынша бізде бары

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(1)}\|_{B_{p_1}^{\alpha_1\tau}(\mathbb{T}^n)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_1,s)} \|\Delta_s(f_\beta^{(1)})\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^n)} \right)^\tau \right)^{1/\tau} = \\ &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_1,s)} 2^{-(\beta,s)} \|\sigma_s\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^n)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_1-\beta+\frac{1}{p_1'},s)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} < +\infty \end{aligned}$$

$\alpha_1 - \beta + \frac{1}{p_1'} < 0$ ретінде.

Бұл дегеніміз $f_\beta^{(1)} \in B_{p_0}^{\alpha_0\tau}(\mathbb{T}^n)$.

Сол сияқты, біз мынаны аламыз

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(1)}\|_{B_{p_0}^{(\alpha_0+\varepsilon)\tau}(\mathbb{T}^n)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_0+\varepsilon,s)} \|\Delta_s(f_\beta^{(1)})\|_{L_{p_0}(\mathbb{T}^n)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \geq \\ &= C_1 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_0+\varepsilon,s)} 2^{\left(\frac{1}{p_0'}-\beta,s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = \end{aligned}$$

$$= C_1 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_0 + \varepsilon + \frac{1}{p'_0} - \beta)s} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = +\infty,$$

$\alpha_0 + \varepsilon + \frac{1}{p'_0} - \beta > 0$ ретінде. Сондықтан $f_\beta^{(1)} \notin B_{p_0}^{(\alpha_0 + \varepsilon)\tau}(\mathbb{T}^n)$.

Әрі қарай, біз көрсетеміз $f_\beta^{(1)} \notin B_{p_0 + \delta}^{\alpha_0 \tau}(\mathbb{T}^n)$

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(1)}\|_{B_{(p_0 + \delta)}^{\alpha_0 \tau}(\mathbb{T}^n)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_0, s)} \| \Delta_s (f_\beta^{(1)}) \|_{L_{p_0 + \delta}(\mathbb{T}^n)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \geq \\ &= C_2 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_0, s)} 2^{\left(\frac{1}{(p_0 + \delta)'} - \beta\right)s} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_2 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\alpha_1 + \frac{1}{(p_0 + \delta)'} - \beta\right)s} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = +\infty, \end{aligned}$$

$\alpha_0 + \frac{1}{(p_0 + \delta)'} - \beta > 0$ ретінде. Сондықтан $f_\beta^{(1)} \notin B_{p_0 + \delta}^{\alpha_0 \tau}(\mathbb{T}^n)$.

Осылайша, біз мынаны көрсеттік $f_\beta^{(1)} \notin B_{p_0}^{(\alpha_0 + \varepsilon)\tau}(\mathbb{T}^n) \cup B_{p_0 + \delta}^{\alpha_0 \tau}(\mathbb{T}^n)$.

Толық дәлелденді.

Тұжырым 1.2.2. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ және $\alpha = 1/p - 1/q$ болсын. Онда кез келген $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ үшін $f_\beta^{(2)} \notin L_{q + \varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^n)$ болатындай $f_\beta^{(2)} \in B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ функция бар болады.

Дәлелдеуі. $f_\beta^{(2)} = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-(\beta, s)} \sigma_s(x)$ функцияны қарастайық, мұндағы $\alpha + \frac{1}{p'_1} < \beta \leq \frac{1}{(q + \varepsilon)'}$. Алдымен $f_\beta^{(2)} \in B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ екенін көрсетейік.

1.2.1 тұжырымға аналогия бойынша, бізде

$$\|f_\beta^{(2)}\|_{B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)} \sim \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha - \beta + \frac{1}{p'_0}, s)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} < \infty$$

$\alpha + \frac{1}{p'_0} - \beta < 0$ ретінде. Бұл дегеніміз $f_\beta^{(2)} \in B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$.

$f_\beta^{(2)} \notin L_{q + \varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^n)$ екенін көрсету үшін біз теорема 1.2.3 қолданамыз.

Бізде бары

$$\|f_\beta^{(2)}\|_{L_{q + \varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^n)} \geq \|f_\beta^{(2)}\|_{B_p^{\frac{1}{q + \varepsilon}}(\mathbb{T}^n)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q+\varepsilon}\right)s} \left\| \Delta_s \left(f_{\beta}^{(2)} \right) \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\
&= C_3 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q+\varepsilon}\right)s} 2^{\left(\frac{1}{p'}-\beta\right)s} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\
&= C_3 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}-\frac{1}{q+\varepsilon}-\beta\right)s} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\
&= C_3 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(1-\frac{1}{q+\varepsilon}-\beta\right)s} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = C_3 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{1}{(q+\varepsilon)'}-\beta\right)s} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = +\infty,
\end{aligned}$$

$\frac{1}{(q+\varepsilon)'} - \beta > 0$ ретінде. Бұл дегеніміз $f_{\beta}^{(2)} \notin L_{q+\varepsilon,\tau}(\mathbb{T}^n)$.

Толық дәлелденді.

Тұжырым 1.2.3. Айталық $1 < q = (q_1, \dots, q_n) < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ және $\alpha = 1/p - 1/q$ болсын. Онда кез келген $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ және $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) > 0$ үшін, $f_{\beta}^{(3)} \notin B_p^{\alpha+\varepsilon,\tau}(\mathbb{T}^n) \cup B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ болатындай $f_{\beta}^{(3)} \in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^n)$ функция бар болады.

Дәлелдеуі. $\frac{1}{q'} < \beta \leq \min\left(\alpha + \varepsilon + \frac{1}{q'}, \alpha + \frac{1}{(p+\delta)'}\right)$ шартын

канағаттандыратын β мен 1.2.1 тұжырымдағыдай $f_{\beta}^{(3)}(x)$ функциясын таңдайық.

$f_{\beta}^{(3)} \in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^n)$ екенін көрсету үшін біз теорема 1.2.2 қолданамыз.

Бізде бары

$$\begin{aligned}
&\left\| f_{\beta}^{(3)} \right\|_{L_{q,\tau}(\mathbb{T}^n)} \leq C_4 \left\| f_{\beta}^{(3)} \right\|_{B_p^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\tau}(\mathbb{T}^n)} = \\
&= C_4 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)s} \left\| \Delta_s \left(f_{\beta}^{(3)} \right) \right\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} \leq \\
&\leq C_5 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)s} 2^{-\beta+\frac{1}{p'}s} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\
&= C_5 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}-\beta-\frac{1}{q}\right)s} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\
&= C_5 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(1-\frac{1}{q}-\beta\right)s} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = C_5 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{1}{q'}-\beta\right)s} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} < +\infty,
\end{aligned}$$

$\frac{1}{q'} - \beta < 0$ ретінде, яғни $f_\beta^{(3)} \in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^n)$.

Енді $f_\beta^{(3)} \notin B_p^{\alpha+\varepsilon,\tau}(\mathbb{T}^n)$ екенін көрсетейік.

Бұл функцияның нормасын төменнен бағалайық

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(3)}\|_{B_p^{\alpha+\varepsilon,\tau}(\mathbb{T}^n)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha+\varepsilon,s)} \|\Delta_s(f_\beta^{(3)})\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \geq \\ &\geq C_6 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha+\varepsilon,s)} 2^{\left(\frac{1}{p'}-\beta,s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_6 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\alpha+\varepsilon+\frac{1}{p'}-\beta,s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = +\infty, \end{aligned}$$

$\alpha + \varepsilon + \frac{1}{p'} - \beta > 0$ ретінде, яғни $f_\beta^{(3)} \notin B_p^{(\alpha+\varepsilon),\tau}(\mathbb{T}^n)$

Әрі қарай, біз $f_\beta^{(3)} \notin B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ екенін көрсетеміз.

$\alpha + \frac{1}{(p+\delta)'} - \beta > 0$ екенін ескере отырып, бізде бары

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(3)}\|_{B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha,s)} \|\Delta_s(f_\beta^{(3)})\|_{L_{(p+\delta)}(\mathbb{T}^n)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \geq \\ &\geq C_7 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha,s)} 2^{\left(\frac{1}{(p+\delta)'}-\beta,s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_7 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\alpha+\frac{1}{(p+\delta)'}-\beta,s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = +\infty, \end{aligned}$$

$\alpha + \frac{1}{(p+\delta)'} - \beta > 0$ ретінде, онда $f_\beta^{(3)} \notin B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$.

Осылайша, біз $f_\beta^{(3)} \notin B_p^{\alpha+\varepsilon,\tau}(\mathbb{T}^n) \cup B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ екенін көрсеттік.

Толық дәлел алынды

1.3 Жалпыланған аралас тегістігі бар Никольский-Бесов $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ кеңістіктеріндегі функциялар үшін іздер және жалғасулар теоремалары

Бұл бөлімшеде біз Никольский-Бесов кеңістіктері үшін іздер және жалғасулар теоремаларын аламыз.

Көп индексті $p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n)$ үшін $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$

белгілеуін енгізейік.

Лемма 1.3.1. (Әр түрлі өлшемдегі теңсіздік, [2, с. 250-255]). Айталық, $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ айнымалылары бойынша, $T_s(x)$ тригонометриялық полиномдардың реті $s = (s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n)$ - тен аспайтын болсын. Онда $1 < p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$ кезінде, ерікті бекітілген нүкте $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^{n-m}$ үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\|T_s(\dots, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^n)} \leq C \prod_{i=m+1}^n s_i^{\frac{1}{p_i}} \|T_s\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}$$

мұндағы C – оң мәнді тұрақты, s - ке тәуелсіз.

Бұл бөлімде біз жалпыланған аралас тегістігі бар Никольский-Бесов кеңістігіндегі функциялардың ізі мен жалғасы туралы теоремалардың қасиеттерін дәлелдейміз.

Теорема 1.3.1. Айталық, $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$. Егер $\alpha_i = 1/p_i$, $q_i = 1$ мұндағы $i = m+1, \dots, n$ болса, онда келесідей ену орындалады

$$B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha} \bar{q}}(\mathbb{T}^m).$$

Дәлелдеуі. Әр түрлі өлшемді теңсіздікке (лемма 1.3.1) және Минковский теңсіздігіне сай біздің алатынымыз

$$\begin{aligned} & \|f(\dots, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha} \bar{q}}(\mathbb{T}^m)} = \\ & = \left\| 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|\Delta_{\bar{s}} f(\dots, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \right\|_{l_{\bar{q}}} \leq \\ & \leq \left\| \left\{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \left\| \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \Delta_{s_{m+1}}(\dots \Delta_{s_n}(\Delta_{\bar{s}}(f))) \right\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} \leq \\ & \leq \left\| \left\{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \|\Delta_{s_{m+1}}(\dots \Delta_{s_n}(\Delta_{\bar{s}}(f)))\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} = \\ & = \left\| \left\{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \|\Delta_s(f)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \sum_{s_n=0}^{\infty} 2^{(s_n)/p_n} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} 2^{(s_{m+1})/p_{m+1}} \|\Delta_s(f)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^n)} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} \leq \\
&\leq C_1 \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} = C_1 \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right\} \right\|_{l_q} = \\
&= C_1 \|f\|_{B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)},
\end{aligned}$$

мұндағы $\alpha_i = 1/p_i$, $q_i = 1$ және $i = m + 1, \dots, n$.

Егер $\alpha_i = 1/p_i$, $q_i = 1$ мұндағы $i = m + 1, \dots, n$, шарттары орындалса, онда келесі қасиеттер орындалады

$$\|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - \varphi(x_1, \dots, x_m)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \rightarrow 0$$

$\max_{i=m+1, \dots, n} |h_i| \rightarrow 0$ үшін.

Анығында да, айталық $N \in \mathbb{N}$ және

$$\Gamma_N = \{s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}^n: \prod_{i=1}^n \max(1, \dots, |s_i|) \leq N\},$$

осыдан

$$\begin{aligned}
&\|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - \varphi(x_1, \dots, x_m)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} = \\
&= \|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} = \\
&= \|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) \\
&\quad + S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \\
&\quad + S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) - (f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \leq \\
&\leq \|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} + \\
&\quad + \|S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} + \\
&\quad + \|S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) - (f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} = I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

мұндағы $S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$, гиперболалық S_{Γ_N} қималарға сәйкес $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ функциясының Фурье қатарының бөлік қосындылары.

I_1 және I_3 бағалаулары үшін Гельдер теңсіздігі мен әртүрлі өлшемдердегі (1.3.1 лемма) Минковский теңсіздігін қолданамыз. For $k = 1$ немесе $k = 3$ үшін, алатынымыз

$$\begin{aligned}
I_k &\leq \sup_{x_{m+1}, \dots, x_n} \|f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \\
&= \sup_{x_{m+1}, \dots, x_n} \|\sum_{s \notin \Gamma_N} \Delta_s(f; \cdot)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \leq \sum_{s \notin \Gamma_N} \sup_{x_{m+1}, \dots, x_n} \|\Delta_s(f; \cdot)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \leq \\
&\leq C_1 \sum_{s \notin \Gamma_N} 2^{-(\bar{\alpha}, \bar{s})} 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(f; x)\|_{L_p(\mathbb{T}^m)} \leq \\
&\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(f; \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^m)} \right\}_{s \notin \Gamma_N} \right\|_{l_q} \cdot \left\| \left\{ 2^{-(\bar{\alpha}, \bar{s})} \right\}_{s \notin \Gamma_N} \right\|_{l_{q'}} \leq \\
&\leq C_2 \|f - S_{\Gamma_N}(f)\|_{B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{егер } N \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

I_2 бағалауын алу үшін, $S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ тригонометриялық полиномы үздіксіз функция екенін ескерсек, алатынымыз

$$\|S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \rightarrow 0$$

$\max_{i=m+1, \dots, n} |h_i| \rightarrow 0$ үшін.

Осымен теорема дәлелденді.

Ескерту 1.3.1. $\alpha_i > 1/p_i$ мұндағы $i = m+1, \dots, n$, үшін дәлелденген басым аралас туындысы бар Никольский-Бесов [12, с. 162-169; 13, с. 27-65; 14, р. 254-270; 15, р. 380-390] кеңістігіндегі функциялар үшін іздер теоремасының айырмашылығы, 1 теоремада $\alpha_i > 1/p_i$ шектік жағдай $q_i = 1$ шарты бойынша $i = m+1, \dots, n$ үшін қарастырылады, (бұл жағдай бұрындары қарастырылған, мысалы [16, с. 75-80; 17, с. 2-4])

Теорема 1.3.2. Айталық $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$. Онда $\alpha_i = 1/p_i$ және $q_i = 1$, $i = m+1, \dots, n$, кезінде $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha} \bar{q}}(\mathbb{T}^m)$ функциясы үшін, келесі қасиеттерге ие болатын $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ функциясын құруға болады

$$f \in B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n),$$

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)} \leq C \|\varphi\|_{B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha} \bar{q}}(\mathbb{T}^m)},$$

$$f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m).$$

Дәлелдеуі. Айталық $\varphi \in B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha} \bar{q}}(\mathbb{T}^m)$. Бұл функцияны $L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)$ мағынасында

оған жинақталатын қатар түрінде көрсетуге болады.

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\bar{s}=0}^{\infty} \Delta_{\bar{s}} \varphi(x_1, \dots, x_m)$$

және

$$\|\varphi\|_{B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{q}}(\mathbb{T}^m)} = \left\| \left\{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|\Delta_{\bar{s}}(\varphi)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}}$$

$f_i(x_i)$ функцияларын $B_{p_i}^{\alpha_i 1}(\mathbb{T})$ ішінен таңдайық, мұндағы $\alpha_i = 1/p_i$, $i = m + 1, \dots, n$ үшін $f_i(0) = 1$ болатындай болсын.

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \sum_{\bar{s}=0}^{\infty} \Delta_{\bar{s}}(\varphi(x_1, \dots, x_m)) \prod_{i=m+1}^n \Delta_{s_i}(f(x_i)).$$

Демек, бұл функция үшін біз мынаны аламыз

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)} &= \left\| 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(\varphi)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right\|_{l_q} = \\ &= \left\| 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|\Delta_{\bar{s}}(\varphi)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \right\|_{l_{\bar{q}}} \prod_{i=m+1}^n \|f_i\|_{B_{p_i}^{\alpha_i 1}(\mathbb{T}^0)} = C_6 \|\varphi\|_{B_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{q}}(\mathbb{T}^m)} \end{aligned}$$

$f_i(0) = 1$ шарты бойынша $i = m + 1, \dots, n$ үшін, бізде бары

$$f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m)$$

$\alpha_i = 1/p_i$ және $q_i = 1$ үшін $i = m + 1, \dots, n$ шарттары $f_i(x_i)$ функцияларының үздіксіздігін қамтамасыз ететінін ескереміз. Сондықтан біз алатынымыз

$$\begin{aligned} &\|f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, x_m)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} = \\ &= \left\| \varphi(x_1, \dots, x_m) \left(\prod_{i=m+1}^n f(x_i) - 1 \right) \right\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \leq \\ &\|\varphi(x_1, \dots, x_m)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{T}^m)} \left| \prod_{i=m+1}^n f(x_i) - 1 \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

мұндағы $\max_{i=m+1, \dots, n} |x_i| \rightarrow 0$.

Бұл аргументтер φ функциясы f функциясының ізі екенін көрсетеді. Толық дәлелденді.

Ескерту 1.3.2. Теорема 1.3.2 дәлелдеуінде тұрғызылған жалғасу

операторы сызықтық екенін ескереміз. Бұл жерде В.И. Буренков пен М.Л. Гольдманның [50] - [51] еңбектерінде классикалық анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктері үшін шектеуші жағдайда тек сызықтық емес жалғасу операторын құруға болатынын атап өткен жөн, бірақ бұл әсер басым аралас туындысы бар Никольский-Бесов кеңістіктері үшін байқалмайды.

2 $S_p^{\alpha q} B(\mathbb{R}^n)$ БАСЫМ АРАЛАС ТУЫНДЫСЫ ЖӘНЕ АРАЛАС МЕТРИКАСЫ БАР НИКОЛЬСКИЙ-БЕСОВ КЕҢІСТІГІ ҮШІН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛЫҚ ҚАСИЕТТЕР МЕН ЕНУЛЕР ТЕОРЕМАЛАРЫ

2.1 $S_p^{\alpha q} B(\mathbb{R}^n)$ кеңістігінің интерполяциясы

Айталық $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$ көп индексті болсын.

Аралас метрикалы $L_p(\mathbb{R}^n)$ Лебег кеңістігі - бұл келесі норма шекті болатын өлшемді функциялар жиынтығы

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{1/p_n}.$$

мұндағы, $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ өрнегі $p = \infty$ үшін $\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ ретінде түсіндіріледі.

Егер кейбір $\rho_0 > 0$ үшін

$$I_{\rho_0} f = F \in L_p(\mathbb{R}^n),$$

мұндағы

$$I_{\rho_0} f = \mathfrak{F}^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{-\frac{\rho_0}{2}} \mathfrak{F}(f) \right)$$

болса, онда жалпыланған f функциясы $L_p(\mathbb{R}^n)$ мағынасында тұрақты деп аталады және \mathfrak{F} және \mathfrak{F}^{-1} сәйкесінше тура және кері Фурье түрлендіруі болып табылады.

Айталық f функциясы $L_p(\mathbb{R}^n)$ мағынасында тұрақты функция болсын. Онда f функцияның $L_p(\mathbb{R}^n)$ мағынасында тұрақты кеңеюі Валле-Пуссен қосындылары бойынша келесі теңдеумен анықталады

$$f = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} Q_s(f)$$

мұндағы

$$Q_s(f) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^n I_{-\rho} \left(\prod_{i=1}^n \left(V_{2^{s_i}}(x_i) - V_{[2^{s_i-1}]}(x_i) \right) * I_{\rho} f \right),$$

мұндағы $\rho > 0$ жеткілікті үлкен, сондықтан $I_{\rho} f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $V_M(t) = \frac{1}{M} \int_M^{2M} \frac{\sin \lambda t}{t} d\lambda$

параметр $M > 0$ және $V_0(t) \equiv 0$ үшін Валле-Пуссен ядросының аналогы болып табылады.

Айталық, ары қарай $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ және $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ болсын.

Басым аралас туындысы бар және аралас метрикасы бар $S_p^{\alpha q} B(\mathbb{R}^n)$ Никольский-Бесов кеңістігі - келесі норма шекті болатын f функциясы үшін $L_p(\mathbb{R}^n)$ мағынасында тұрақты мәндердің жиыны болып табылады

$$\|f\|_{S_p^{\alpha q} B(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{s \in \mathbb{Z}_+^n} \right\|_{l_q},$$

мұндағы $(\alpha, s) = \sum_{j=1}^n \alpha_j s_j$ ішкі көбейтінді болады және $\|\cdot\|_{l_q}$ аралас метрикалы l_q дискретті Лебег кеңістігінің нормасы болып табылады.

Ескерту 2.1.1. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$ жағдайда, $q = (\infty, \dots, \infty)$ параметр үшін бұл кеңістіктер [11, с. 806-808] және [12, с. 159-170] еңбектерінде енгізіліп, зерттелді, ал $p = (p, \dots, p)$ және $q = (q, \dots, q)$ [7, с. 1345-1348; 8, с. 255-256; 9, с. 20-25] еңбегінде қарастырылған. Бұл кеңістіктердің перодты аналогтары [33, с. 33-42; 34, с. 29-32; 36, с. 43-48] жұмыстарында зерттелген.

Келесі леммада басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістігінің элементар енулері көрсетілген.

Лемма 2.1.1. а) Айталық $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \leq q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$ болсын, мұндағы

$$S_p^{\alpha q_0} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha q_1} B(\mathbb{R}^n).$$

б) Айталық $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$ және $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0), q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$ болсын, мұндағы

$$S_p^{\alpha_1 q_1} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha_0 q_0} B(\mathbb{R}^n).$$

Дәлелдеуі. а) тұжырымының дәлелі Дженсен теңсіздігінен туындайды.

б) тұжырымын дәлелдейік. а) тармағына сәйкес $\alpha_0 \leq \alpha_1$ үшін енуді дәлелдеу жеткілікті

$$S_p^{\alpha_1 q_1} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha_0 q_1} B(\mathbb{R}^n). \quad (2.1.1)$$

Бізде бары

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_p^{\alpha_0 q_1} B(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} 2^{(\alpha_0, s)} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{Z}_+^n} 2^{(\alpha_1, s)} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} 2^{(\alpha_0 - \alpha_1, s)} \leq C_1 \|f\|_{S_p^{\alpha_1 q_1} B(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Бұл (2.1.1) теңсіздік енудің жүзеге асқанын білдіреді.

Айталық көп индексті $p = (p_1, \dots, p_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ болсын. Егер $1 \leq p_i < \infty$ болса, онда $1 \leq r_i \leq \infty$, ал егер $p_i = \infty$ болса, онда $r_i = \infty$ ($i=1, \dots, n$).

$L_{pr}(\mathbb{R}^n)$ анизотропты Лоренц кеңістігі - бұл келесі функциялар жиынтығы

$$\|f\|_{L_{pr}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_0^\infty \left(t_n^{1/p_n} \dots \left(\int_0^\infty \left(t_1^{1/p_1} f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty,$$

мұндағы $f^*(t) = f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$ үлкейтілмейтін қайталанатын $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ функцияларының ауыстыруын көрсетеді.

Бұдан кейін $f^*(t) = f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$ ретінде біз алдымен x_1 -ге қатысты x_2, \dots, x_n -тұрақтыларымен, ал онда x_2 -ге қатысты тұрақты басқа айнымалылармен және тағы солай өспейтін қайта топтастыруларды айтамыз.

Лемма 2.1.2. ([17, с. 3-4]). Айталық $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) \neq p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \infty$ болсын. Одан кейін $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ және $1 \leq r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$ үшін

$$(L_{p_\varepsilon}(\mathbb{R}^n); \varepsilon \in E)_{\theta r} = L_{pr}(\mathbb{R}^n),$$

мұндағы $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Лемма 2.1.3. Айталық $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ және $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ болсын. Онда $l_q^\alpha(L_p(\mathbb{R}^n))$ кеңістігі $S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)$ кеңістігінің ретракциясы (жиырылуы) болып табылады.

Дәлелдеуі. Бірінші қадам. $f \in S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)$ функциясы үшін S операторын келесідей анықтаймыз

$$Sf = \{Q_s(f, x)\}_{s \in \mathbb{Z}_+^n}.$$

Сондықтан, анықтамаға сәйкес, бізде бары

$$\|Sf\|_{l_q^\alpha(L_p(\mathbb{R}^n))} = \|\{Q_s(f, \cdot)\}\|_{l_q^\alpha(L_p(\mathbb{R}^n))} = \|f\|_{S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)},$$

бұл S -қасиеті қанағаттандырылғанын білдіреді.

Екінші қадам. $f = \{f_s(x)\}_{s \in \mathbb{Z}_+^n}$ реттілігі үшін операторды анықтайық.

$$Rf = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} Q_s(f_s)(x).$$

$V_M \in L_1(\mathbb{R})$ сәйкес, бізде бары

$$\|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

мұндағы C абсолютті тұрақты, содан кейін

$$\|Rf\|_{S_p^{\alpha q} B(\mathbb{R}^n)} = \|\{Q_s(f_s)\}\|_{l_q^{\alpha}(L_p(\mathbb{R}^n))} \leq C \|f_s\|_{l_q^{\alpha}(L_p(\mathbb{R}^n))} = C \|f\|_{l_q^{\alpha}(L_p(\mathbb{R}^n))}.$$

Соңғы теңсіздік R -қасиетінің сақталатынын білдіреді.

Үшінші қадам. $RS = E$ екенін көрсетейік. Шынында да

$$RSf(x) = R(\{Q_s(f, x)\}) = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} Q_s(Q_s(f, x)) = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} Q_s(f, x) = f(x)$$

Толық дәлелденді.

Теорема 2.1.1. Айталық $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$, $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \neq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \neq q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ болсын. Содан кейін $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ және $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ үшін

$$(S_p^{\alpha \varepsilon q \varepsilon} B(\mathbb{R}^n); \varepsilon \in E)_{\theta q} = S_p^{\alpha q} B(\mathbb{R}^n),$$

мұндағы $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Дәлелдеуі. Теореманың дәлелі лемма 1.1.2 және 2.1.3 нәтижелерінен алынған.

2.2 $S_p^{\alpha q} B(\mathbb{R}^n)$ кеңістігі үшін әртүрлі метрикалардың енулер теоремалары

Бұл бөлімде жалпыланған аралас туындысы және анизотропты Лоренц кеңістіктері бар анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктері үшін әртүрлі көрсеткіштер үшін шекті ену теоремалары дәлелденді.

Лемма 2.2.1 (әр түрлі метрикадағы теңсіздік, [2, с. 260-264]). Айталық $Q_s(x)$ бұл $x = (x_1, \dots, x_n)$ көп айнымалыларының $s = (s_1, \dots, s_n)$ ретті экспоненциалды типті бүтінсанды функциясы болсын.

Онда $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$ үшін

$$\|Q_s\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \prod_{i=1}^n s_i^{\frac{1}{p_i^0} - \frac{1}{p_i^1}} \|Q_s\|_{L_{p_0}(\mathbb{R}^n)},$$

мұндағы C_2 – оң, s - ке тәуелсіз, тұрақты.

Теорема 2.2.1. Айталық $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ және $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, $p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$ болсын.

Егер $\alpha_0 - \frac{1}{p_0} = \alpha_1 - \frac{1}{p_1}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$S_{p_1}^{\alpha_1 \tau} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_{p_0}^{\alpha_0 \tau} B(\mathbb{R}^n).$$

Дәлелдеуі. Айталық $f \in S_{p_1}^{\alpha_1 \tau} B(\mathbb{R}^n)$ болсын, онда әртүрлі метрикадағы теңсіздікке (лемма 2.2.1) сай, алатынымыз

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_{p_0}^{\alpha_0 \tau} B(\mathbb{R}^n)} &= \left\| 2^{(\alpha_0, s)} \|Q_s(f)\|_{L_{p_0}(\mathbb{R}^n)} \right\|_{l_\tau} \leq \\ &\leq C_2 \left\| 2^{(\alpha_0 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}, s)} \|Q_s(f)\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \right\|_{l_\tau} = \\ &= C_2 \left\| \left\{ 2^{(\alpha_1, s)} \|Q_s(f)\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \right\} \right\|_{l_\tau} = C_2 \|f\|_{S_{p_1}^{\alpha_1 \tau} B(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Теорема толық дәлелденді.

Теорема 2.2.2. Айталық $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$ және $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ болсын. Егер $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$S_p^{\alpha \tau} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{q\tau}(\mathbb{R}^n).$$

Дәлелдеуі. Минковский теңсіздігі мен әртүрлі метрикадағы теңсіздікке (лемма 2.2.1) сай, алатынымыз

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(f) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \|Q_s(f)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \sum_{s=0}^{\infty} 2^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, s\right)} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = C_2 \|f\|_{S_p^{\alpha 1} B(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

мұндағы $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Сондықтан $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ үшін алатынымыз.

$$S_p^{\alpha 1} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n).$$

$p = (p_1, \dots, p_n)$ мәнін тұрақты етіп алайық және $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$ және $q_i = (q_1^i, \dots, q_n^i)$ болатындай $\alpha_j^i = \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^i}$, мұндағы $i = 0, 1$ және $j = 1, \dots, n$. Сонда әрбір $\varepsilon \in E$ үшін бізде бары

$$S_p^{\alpha_\varepsilon} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{q_\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

Лемма 2.1.2 және теорема 2.1.1 бойынша біздің алатынымыз

$$(S_p^{\alpha_\varepsilon} B(\mathbb{R}^n); \varepsilon \in E)_{\theta\tau} \hookrightarrow (L_{q_\varepsilon}(\mathbb{R}^n); \varepsilon \in E)_{\theta\tau}$$

немесе

$$S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{q\tau}(\mathbb{R}^n),$$

мұндағы $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $1/q = (1 - \theta)q_0 + \theta q_1$.

α , p және q параметрлері арасындағы байланысты тексерейік.

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = (1 - \theta) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0} \right) + \theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1} \right) = \\ &= \left(\frac{(1-\theta)}{p} + \frac{\theta}{p} \right) - \left(\frac{(1-\theta)}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Теорема толық дәлелденді.

Теорема 2.2.3. Айталық $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ және $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ болсын. Егер $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ болса, онда келесі ену орындалады

$$L_{q\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n).$$

Дәлелдеуі. $V_M(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ және әртүрлі метрикалардағы теңсіздікке (лемма 2.2.1) сай, $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ үшін

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_p^{\alpha\infty} B(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{s \geq 0} 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq C_3 \sup_{s \geq 0} 2^{(\alpha + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}, s)} \|Q_s(f)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} = \\ &= C_3 \sup_{s \geq 0} \left\| \left(\frac{1}{\pi} \right)^n \prod_{i=1}^n (V_{2^{s_i}}(\cdot) - V_{2^{s_i-1}}(\cdot)) * f \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C_4 \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Осылайша $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ үшін алатынымыз:

$$L_q(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha\infty} B(\mathbb{R}^n).$$

$p = (p_1, \dots, p_n)$ мәнін тұрақты етіп алайық және $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$ және $q_i = (q_1^i, \dots, q_n^i)$ болатындай $\alpha_j^i = \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^i}$, мұндағы $i = 0, 1$ және $j = 1, \dots, n$. Онда әрбір

$\varepsilon \in E$ үшін бізде бары

$$L_{q_\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha_\varepsilon} B(\mathbb{R}^n)$$

Лемма 2.1.2 және теорема 2.1.1 бойынша біздің алатынымыз

$$(L_{q_\varepsilon}(\mathbb{R}^n); \varepsilon \in E)_{\theta\tau} \hookrightarrow (S_p^{\alpha_\varepsilon} B(\mathbb{R}^n); \varepsilon \in E)_{\theta\tau}$$

немесе $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $1/q = (1 - \theta)q_0 + \theta q_1$ үшін

$$L_{q\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n).$$

α , p және q параметрлері арасындағы байланысты тексерейік.

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = (1 - \theta) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0} \right) + \theta \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1} \right) = \\ &= \left(\frac{(1-\theta)}{p} + \frac{\theta}{p} \right) - \left(\frac{(1-\theta)}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Теорема толық дәлелденді.

Ескерту 2.2.1. 2.2.1 – 2.2.3 теоремалардың шарттары жақсартылмайтындығын көрсетуге болады.

2.3 $S_p^{\alpha q} B(\mathbb{R}^n)$ кеңістігі үшін іздер мен жалғасу теоремалары

Бұл бөлімде жалпыланған аралас туындысы және анизотропты Лоренц кеңістіктері бар Никольский-Бесов кеңістігіндегі функциялардың іздері мен жалғасы туралы теоремалар дәлелденеді.

$a = (a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$ үшін $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ және $\tilde{a} = (a_{m+1}, \dots, a_n)$ арқылы белгілейік.

Лемма 2.3.1 (Өртүрлі өлшемдегі теңсіздік, [2, с. 260-262]). Айталық $Q_s(x)$ бұл $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ және $1 \leq p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$ көп айнымалыларының $s = (s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n)$ ретті экспоненциалды типті бүтінсанды функциясы болсын, онда кез келген $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$ бекітілген нүкте үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\|Q_s(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{L_p(\mathbb{R}^m)} \leq C_4 \prod_{i=m+1}^n s_i^{1/p_i} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

мұндағы C_4 дегеніміз s -ке тәуелсіз оң тұрақты шама.

Теорема 2.3.1. Айталық $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots, \tau_n) \leq \infty$, $1 \leq p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$.

Онда $\alpha_i = 1/p_i$ және $\tau_i = 1$, мұндағы $i = m + 1, \dots, n$, үшін келесі енулер

орындалады

$$S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{\tau}} B(\mathbb{R}^n).$$

Дәлелдеуі. Өртүрлі метрикалардағы теңсіздік (Лемма 2.6) және Минковский теңсіздігіне сай, алатынымыз

$$\begin{aligned}
& \|f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{\tau}} B(\mathbb{R}^n)} = \\
& \left\| 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|Q_{\bar{s}}(f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n))\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leq \\
& \leq \left\| \left\| \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} Q_{s_{m+1}}(\dots Q_{s_n}(2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} Q_{\bar{s}}(f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)))) \right\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leq \\
& \leq \left\| \left\| \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \|Q_{s_{m+1}}(\dots Q_{s_n}(2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} Q_{\bar{s}}(f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n))))\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} = \\
& \left\| \left\| \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} Q_{s_{m+1}}(\dots Q_{s_n}(2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} Q_{\bar{s}}(f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)))) \right\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} = \\
& = \left\| \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|Q_{\bar{s}}(f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n))\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leq \\
& \leq \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \left\| \left\{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|Q_{\bar{s}}(f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n))\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)} \right\} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leq \\
& \leq C_4 \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} 2^{\frac{s_{m+1}}{p_{m+1}} \dots \frac{s_n}{p_n}} \left\| \left\{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|Q_{\bar{s}}(f)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)} \right\} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} = \\
& C_4 \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\} \right\|_{l_q} = C_4 \|f\|_{S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.3.1}
\end{aligned}$$

мұндағы $\alpha_i = 1/p_i$ және $\tau_i = 1$, мұндағы $i = m+1, \dots, n$.

$\alpha_i = 1/p_i$ және $\tau_i = 1$, мұндағы $i = m+1, \dots, n$ шарты келесі қасиеттің орындалуын қамтамасыз етеді

$$\|f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1} + h_{m+1}, \dots, x_n + h_n) - f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{\tau}} B(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \tag{2.3.2}$$

$\max_{i=m+1, \dots, n} |h_i| \rightarrow 0$ үшін.

$f \in S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n)$ тұжырымына сай, кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

болатындай бар болады

$$I_{N(\varepsilon)}^2 = \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{\{s: (s, 1) > N(\varepsilon)\}} \right\|_{l_\tau} < \frac{\varepsilon}{3C_4}. \quad (2.3.3)$$

Минковский теңсіздігі мен (2.3.2) теңсіздікті қолданып, (2.3.3) бағалауға сай, алатынымыз

$$\begin{aligned} & \|f(\cdot, \dots, \cdot; x_{m+1} + h_{m+1}, \dots, x_n + h_n) - f(\cdot, \dots, \cdot; x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{S_{\bar{p}}^{\alpha, \tau} B(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq C_4 \|f(\cdot, \dots, \cdot; \cdot + h_{m+1}, \dots, \cdot + h_n) - f(\cdot, \dots, \cdot; \dots, \cdot)\|_{S_{\bar{p}}^{\alpha, \tau} B(\mathbb{R}^n)} \leq \\ & \leq C_4 \left(\left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f(\cdot, \dots, \cdot; \cdot + h_{m+1}, \dots, \cdot + h_n)) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - Q_s(f(\cdot, \dots, \cdot; \dots, \cdot))\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{\{s: (s, 1) \leq N(\varepsilon)\}} \right\|_{l_\tau} + \right. \\ & \quad \left. + \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f(\cdot, \dots, \cdot; \cdot + h_{m+1}, \dots, \cdot + h_n)) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - Q_s(f(\cdot, \dots, \cdot; \dots, \cdot))\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{\{s: (s, 1) > N(\varepsilon)\}} \right\|_{l_\tau} \right) \leq \\ & \leq C_4 \left(\left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f(\cdot, \dots, \cdot; \cdot + h_{m+1}, \dots, \cdot + h_n)) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - Q_s(f(\cdot, \dots, \cdot; \dots, \cdot))\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{\{s: (s, 1) \leq N(\varepsilon)\}} \right\|_{l_\tau} + \right. \\ & \quad \left. + 2 \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{\{s: (s, 1) > N(\varepsilon)\}} \right\|_{l_\tau} \right) = \\ & = C_4 (I_{N(\varepsilon)}^1 + I_{N(\varepsilon)}^2) < C_4 I_{N(\varepsilon)}^1 + \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (2.3.4) \end{aligned}$$

$I_{N(\varepsilon)}^1$ мәнін есептеу үшін келесі теңсіздікті қолданамыз (қараңыз [8, с. 7-9])

$$\begin{aligned} & \|Q_s(f(\cdot, \dots, \cdot; \cdot + h_{m+1}, \dots, \cdot + h_n)) - Q_s(f(\cdot, \dots, \cdot; \dots, \cdot))\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq 2^{(\tilde{s}, \tilde{1})} \prod_{i=m+1}^n |h_i| \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Осыдан біз алатынымыз

$$I_{N(\varepsilon)}^1 \leq 2^{(\bar{s}, \bar{1})} \prod_{i=m+1}^n |h_i| \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|Q_s(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}_{\{s: (s,1) \leq N(\varepsilon)\}} \right\|_{l_\tau}$$

$$\leq 2^{N(\varepsilon)} \prod_{i=m+1}^n |h_i| \|f\|_{S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n)}$$

$$|h_i| < \left(\frac{\varepsilon}{3C_4 2^{N(\varepsilon)} \|f\|_{S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n)}} \right)^{1/(n-m)}, \text{ мұндағы } i = m+1, \dots, n, \text{ етіп таңдайық.}$$

Онда алатынымыз

$$I_{N(\varepsilon)}^1 < \frac{\varepsilon}{3C_4}. \quad (2.3.5)$$

(2.3.5) бағалауды (2.3.4) ке қойып, алатынымыз

$$\|f(\cdot, \dots, \cdot; x_{m+1} + h_{m+1}, \dots; x_n + h_n) - f(\cdot, \dots, \cdot; x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Бұл (2.3.2) қасиеттің орындалатынын көрсетеді.

Осымен теореманың толық дәлелдеуі аяқталды.

Теорема 2.3.2. Айталық $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots, \tau_n) \leq \infty$, $1 \leq p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$ болсын. Онда $\alpha_i = 1/p_i$ және $\tau_i = 1$, мұндағы $i = m+1, \dots, n$, мәндерінде $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n)$ функция үшін келесі қасиеттерге ие болатын $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ функциясын құруға болады:

$$f \in S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n);$$

$$\|f\|_{S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n)} \leq C_5 \|\varphi\|_{S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^m)};$$

$$f(\cdot, \dots, \cdot, 0, \dots, 0) = \varphi(\cdot, \dots, \cdot).$$

Дәлелдеуі. Айталық $\varphi \in S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^m)$ болсын. Бұл функцияны қатар түрінде көрсетуге болады.

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\bar{s}=0}^{\infty} Q_{\bar{s}}(\varphi(x_1, \dots, x_m))$$

және

$$\|\varphi\|_{S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^m)} = \left\| 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|Q_{\bar{s}}(\varphi)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}}.$$

$f_i(0) = 1$ болатындай $B_{p_i}^{\alpha_i 1}(\mathbb{R})$ кеңістігінен $f_i(x_i)$ функциясын алайық,

мұндағы $i = m + 1, \dots, n$. Жаңа функция енгізейік

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \sum_{\bar{s}=0}^{\infty} Q_{\bar{s}}(\varphi(x_1, \dots, x_m)) \prod_{i=m+1}^n Q_{s_i}(f_i(x_i)).$$

Демек, бұл функция үшін біз мынаны аламыз

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_p^{\alpha\tau} B(\mathbb{R}^n)} &= \left\| 2^{(\alpha, \bar{s})} \|Q_{\bar{s}}(\varphi)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{l_q} = \\ &= \left\| 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|Q_{\bar{s}}(\varphi)\|_{L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \prod_{i=m+1}^n \|f_i\|_{B_{p_i}^{\alpha_i 1}(\mathbb{R})} = C_5 \|\varphi\|_{S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{\tau}} B(\mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

$i = m + 1, \dots, n$ үшін $f_i(0) = 1$ шарты бойынша бізде бары

$$f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m).$$

$i = m + 1, \dots, n$ үшін $\alpha_i = 1/p_i$ және $\tau_i = 1$ шарттары $f_i(x_i)$ функциясының үздіксіздігін қамтамасыз етеді. Сонымен алатынымыз

$$\begin{aligned} &\lim_{x_{m+1} \rightarrow 0, \dots, x_n \rightarrow 0} \|f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n) - \varphi(\cdot, \dots, \cdot)\|_{S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{\tau}} B(\mathbb{R}^m)} = \\ &\lim_{x_{m+1} \rightarrow 0, \dots, x_n \rightarrow 0} \left\| \varphi(\cdot, \dots, \cdot) \left(\prod_{i=m+1}^n f_i(x_i) - 1 \right) \right\|_{S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{\tau}} B(\mathbb{R}^m)} = \\ &= \|\varphi(\cdot, \dots, \cdot)\|_{S_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}\bar{\tau}} B(\mathbb{R}^m)} \cdot \lim_{x_{m+1} \rightarrow 0, \dots, x_n \rightarrow 0} |\prod_{i=m+1}^n f_i(x_i) - 1| = 0. \end{aligned}$$

Бұл дәлелдер φ функциясы f функциясының ізі екенін көрсетеді. Теореманың толық дәлелдеуі аяқталды.

3 АНИЗОТРОПТЫ ЖӘНЕ АРАЛАС МЕТРИКАЛЫ КЕҢІСТІКТЕРДЕГІ ЖУЫҚТАУ ТЕОРИЯСЫНЫҢ КЕЙБІР ЕСЕПТЕРІ

Екінші бөлімде басым аралас туындысы бар және аралас тегістігі бар кеңістіктердегі жуықтау теориясының бірқатар мәселелері зерттеледі.

3.1 Никольский-Бесовтың анизотропты класының ортопроекциялық көлденеңдерінің реттері туралы

Бұл бөлімшеде $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$ шартымен Никольский-Бесов $B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ класының $L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ анизотропты Лоренц кеңістігінің метрикасында ортопроекциялық көлденеңдеріне бағалаулар алынды.

Айталық, $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ – кеңістіктегі ортонормальды функциялар жүйесі $L_2(\mathbb{T}^n)$ және V – нормаланған кеңістік, болсын. Әрбір $f \in V$ функцияға $\sum_{i=1}^M (f, u_i)u_i(x)$ түріндегі жуықтау аппаратын сәйкес қоямыз, яғни $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ функциялар жүйесімен құрылған $L_2(\mathbb{T}^n)$ ішкі кеңістігіне, $f(x)$ функциясының ортогональ проекциясын сәйкес қоямыз. Егер $F \subset V$ – қандай да бір функционалды класс болса, онда

$$d_M^\perp(F, V) = \inf_{\{u_i(x)\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \|f(\cdot) - \sum_{i=1}^M (f, u_i)u_i(\cdot)\|_V \quad (3.1.1)$$

шамасы V кеңістігінде осы кластың ортопроекциялық көлденеңі деп аталады. $d_M^\perp(F, V)$ көлденеңін В.Н.Темляков енгізген болатын [52].

Сонымен қатар, параллельді түрде, В.Н.Темляков [53] қарастырған $d_M^B(F, V)$, шамаларын зерттедік. Олар келесідей анықталады

$$d_M^B(F, V) = \inf_{G \in \mathfrak{L}_M(B)_V} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_V \quad (3.1.2)$$

Мұнда, шарттарды қанағаттандыратын, барлық сызықтық операторлардың жиынтығы $\mathfrak{L}_M(B)_V$ арқылы белгіленген:

а) осы операторлардың $D(G)$ анықтау облысы барлық тригонометриялық полиномдарды қамтиды және олардың мәндер облысы M өлшемді V кеңістігінің ішкі кеңістігінде жатады;

б) барлық $k = (k_1, \dots, k_n)$ векторлары үшін

$$\|Ge^{2\pi i(k, x)}\|_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leq B$$

теңсіздігі орындалатындай, $B \geq 1$ саны бар болады.

$$d_M^B(F, V) \leq d_M^\perp(F, V). \quad (3.1.3)$$

болатынын көру оңай.

Демек, $d_M^B(F, V)$ шамаларының төменгі бағалары $d_M^\perp(F, V)$ ортопроекциялық көлденеңдерінің төменгі жағындағы бағалар ретінде қызмет ете алады және керісінше - $d_M^\perp(F, V)$ ортопроекциялық көлденеңдердің жоғарғы бағаларын $d_M^B(F, V)$ шамаларын жоғарыдан бағалау үшін пайдалануға болады. Бұл жағдайды біз төмендегі тиісті мәлімдемелерді дәлелдеу кезінде қолданамыз.

$V = L_q(\mathbb{T}^n)$ болғанда, ал F орнына $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^n)$, $H_p^r(\mathbb{T}^n)$, $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^n)$ изотропты кластар қарастырылған жағдайда көлденеңдердің мұндай түрлері В.Н. Темляковтың [52, р. 619-622; 53, с.165-190], Э.М. Галеевтің [54]-[55], А.В. Андрианов және В.Н. Темляковтың [56], А.С. Романюктің [14, р. 256-270; 15, р. 380-390; 16, с. 72-85] (изотропты кеңістіктер мен кластар) еңбектерінде зерттелді.

$V = L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ – Лоренцтің анизотропты кеңістігі жағдайында, ал F – анизотропты $H_{p\theta}^r(\mathbb{T}^n)$ немесе $B_{p,\theta}^{r\tau}(\mathbb{T}^n)$ кластардың бірі жағдайлар үшін бұл көлденеңдер Г.А. Ақышевтің [20, с. 18-30], К.А. Бекмаганбетов және Е. Төлеуғазы [31, с. 237-247] жұмыстарында зерттелген.

Біз келесі теореманы алдық:

Теорема 3.1.1. Айталық $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $1 \leq \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$, $\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0} = \min\{\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j : j = 1, \dots, n\} > 0, D = \{\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j = \alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0} : j = 1, \dots, n\}$, $j_1 = \min\{j : j \in D\}$ және $q_j = q_{j_0}$, $\theta_j \leq \tau_j$ егер $j \in D$ болса. Онда

$$\begin{aligned} d_M^\perp(B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n), L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)) &\asymp d_M^B(B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n), L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)) \asymp \\ &\asymp M^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0})} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0}) + \sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/\theta_j - 1/\tau_j)}, \quad (3.1.4) \end{aligned}$$

мұндағы $|D|$ – жиын D элементтерінің саны.

Қажетті көмекші нәтижелерді жүргізейік.

Лемма 3.1.1. ([52, р. 620-621]). Айталық A – барлық тригонометриялық полиномдардың жиынында келесідей анықталған сызықтық оператор

$$A(e^{i(k,x)}) = \sum_{m=1}^M a_m^k \psi_m(x)$$

Барлық $k \in \mathbb{Z}^n$ үшін, мұнда a_m^k – берілген сан және $\|\psi_m\|_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leq 1, m = 1, \dots, M$ болатындай $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^M$ – берілген функциялар жүйесі. Онда кез келген $t(x) = \sum_k \hat{t}(k) e^{i(k,x)}$ тригонометриялық полином үшін

$$\min_{x \in \mathbb{T}^n} \operatorname{Re} A(t(\cdot - y))(x) \Big|_{y=x} \leq \left(M \sum_{m=1}^M \sum_k |\hat{t}(k) a_m^k|^2 \right)^{1/2}.$$

Келешекте бізге келесі жиындар қажет

$$Y^n(N, \gamma) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{j=1}^n \gamma_j s_j \geq N \right\},$$

$$\mathfrak{N}^n(N, \gamma) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{j=1}^n \gamma_j s_j = N \right\}.$$

Лемма 3.1.2. ([26, p. 9-11]). Айталық $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 < \gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n) \leq \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) < \infty, \delta > 0$ және $0 < \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \leq \infty$. Онда

$$\left\| \{2^{-\delta(\gamma, s)}\}_{s \in Y^n(N, \gamma')} \right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}_+^n)} \leq C 2^{-\delta \eta N} N^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} 1/\varepsilon_j},$$

мұндағы $\eta = \min\{\gamma_j/\gamma'_j : j = 1, \dots, n\}, A = \{j : \gamma_j/\gamma'_j = \eta, j = 1, \dots, n\}, j_1 = \min\{j : j \in A\}$.

Лемма 3.1.3 ([26, p. 12-14]). Айталық $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 < \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) < \infty, \delta \in \mathbb{R}$ және $0 < \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \leq \infty$. Онда

$$\left\| \{2^{-\delta(\gamma, s)}\}_{s \in \mathfrak{N}^n(N, \gamma)} \right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}_+^n)} \asymp 2^{-\delta N} N^{\sum_{j=2}^n \frac{1}{\varepsilon_j}}.$$

Теореманың дәлелдеуі. Алдымен жоғарыдан бағалауды дәлелдейміз. $M \asymp 2^N N^{|D|-1}$ болатындай етіп $N \in \mathbb{N}$ санын таңдап аламыз. Айталық

$$\gamma_j = \frac{\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j}{\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0}}, j = 1, \dots, n.$$

$j \in D$ үшін $\gamma'_j = 1$ деп аламыз, ал $j \notin D$ үшін γ'_j санын $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ болатындай етіп аламыз. $Q(\gamma', N)$ үшін $|Q(\gamma', N)| \asymp M$ аламыз.

Айталық $S_{\gamma', N}(f)$ - Фурье қатарының бөлік қосындысының $Q(\gamma', N)$ мәніне сәйкес f функциясы болсын. Онда

$$\Delta_s(f - S_{\gamma', N}(f)) = \begin{cases} 0, & s \notin Y^n(\gamma', N) \\ \Delta_s(f), & s \in Y^n(\gamma', N) \end{cases}$$

Теорема 2.2.2 ортопроекциялық көлденеңнің анықтамасы және Гельдер теңсіздігі бойынша

$$d_M^\perp(B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n), L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)) \leq \|f - S_{\gamma', N}(f)\|_{L_{q\theta}} = \left\| \sum_{s \in Y^n(\gamma', N)} \Delta_s(f) \right\|_{L_{q\theta}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \left\| \sum_{s \in Y^n(\gamma', N)} \Delta_s(f) \right\|_{B_q^{(1/p-1/q)\theta}} = C_1 \left\| \left\{ 2^{(1/p-1/q)s} \|\Delta_s(f)\|_{L_p} \right\}_{s \in Y^n(\gamma', N)} \right\|_{l_\theta} \\
&= C_1 \left\| \left\{ 2^{-(\alpha+1/q-1/p)s} 2^{(\alpha,s)} \|\Delta_s(f)\|_{L_p} \right\}_{s \in Y^n(\gamma', N)} \right\|_{l_\theta} \\
&\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{(\alpha,s)} \|\Delta_s(f)\|_{L_p} \right\}_{s \in Y^n(\gamma', N)} \right\|_{l_\tau} \left\| \left\{ 2^{-(\alpha+1/q-1/p)s} \right\}_{s \in Y^n(\gamma', N)} \right\|_{l_\varepsilon} \\
&\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{-(\alpha_{j_0}+1/q_{j_0}-1/p_{j_0})(\gamma,s)} \right\}_{s \in Y^n(\gamma', N)} \right\|_{l_\varepsilon} \|f\|_{B_p^{\alpha\tau}} \\
&= C_1 \left\| \left\{ 2^{-(\alpha_{j_0}+1/q_{j_0}-1/p_{j_0})(\gamma,s)} \right\}_{s \in Y^n(\gamma', N)} \right\|_{l_\varepsilon},
\end{aligned}$$

мұндағы ε мәні $1/\varepsilon = (1/\theta - 1/\tau)_+$ болатындай. Лемма 3.1.2 қолданып, алатынымыз

$$d_M^\perp \left(B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n), L_{q\theta}(\mathbb{T}^n) \right) \leq C_2 2^{-(\alpha_{j_0}+1/q_{j_0}-1/p_{j_0})N} N^{\sum_{j \in d \setminus \{j_1\}} (1/\theta_j - 1/\tau_j)_+} \quad (3.1.5)$$

Мұнда $D = \{j = 1, \dots, n: \alpha_j - 1/p_j + 1/q_j = \alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/q_{j_0}\}$, $j_1 = \min\{j : j \in D\}$ және $(a)_+ = \max(a, 0)$. Барлық $j \in D$ үшін $M \asymp 2^N N^{|D|-1}$ және $\theta_j \leq \tau_j$ болғандықтан, алатынымыз

$$\begin{aligned}
&2^{-(\alpha_{j_0}-1/p_{j_0}+1/q_{j_0})N} N^{\sum_{j \in d \setminus \{j_1\}} (1/\theta_j - 1/\tau_j)_+} \\
&\asymp M^{-(\alpha_{j_0}-1/p_{j_0}+1/q_{j_0})} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_0}-1/p_{j_0}+1/q_{j_0}) + \sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/\theta_j - 1/\tau_j)}
\end{aligned}$$

Соңғы қатынасты (3.2) - ге қойып, жоғарыдан бағалау аламыз.

Енді төменнен бағалауды дәлелдейміз. $s_0 = (s_1^0, \dots, s_n^0)$ деп аламыз, мұндағы $s_j^0 = s_j$ егер $j \in D$ және $s_j^0 = 0$ егер $j \notin D$, $\tilde{s} = (s_{j_1}, \dots, s_{j_{|D|}})$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_{|D|}})$, мұндағы $j_i \in D$, $i = 1, \dots, |D|$ және $j_i < \dots < j_{|D|}$.

Келесі тригонометриялық полиномды қарастырамыз

$$t(x) = N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \sum_{(\gamma', s_0) = N} 2^{-\sum_{j=1}^n (\alpha_j + 1 - 1/p_j) s_j^0} \sum_{k \in \rho(s_0)} e^{i(k, x)}.$$

Онда, Бернуллидің бір өлшемді ядроларының бағалауы бойынша, алатынымыз

$$\begin{aligned}
t(0) &= N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \sum_{(Y', s_0) = N} 2^{-\sum_{j=1}^n (\alpha_j + 1 - 1/p_j) s_j^0} \sum_{k \in \rho(s_0)} 1 \asymp \\
&\asymp N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \sum_{(Y', s_0) = N} 2^{-\sum_{j=1}^n (\alpha_j + 1 - 1/p_j) s_j^0} \cdot 2^{\sum_{j=1}^n s_j^0} = \\
&= N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \sum_{(Y', s_0) = N} 2^{-\sum_{j \in D} (\alpha_j - 1/p_j) s_j^0} = \\
&= N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \sum_{(\tilde{1}, \tilde{s}) = N} 2^{-\sum_{j \in D} (\alpha_j - 1/p_j) s_j} = \\
&= N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \sum_{(\tilde{1}, \tilde{s}) = N} 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0})(\tilde{1}, \tilde{s})} \asymp \\
&\asymp N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \cdot 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0})N} N^{|D|-1} = \\
&= 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0})N} N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j}. \tag{3.1.6}
\end{aligned}$$

Айталық $G \in \mathfrak{L}_M(B)_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)}$ операторы берлген болсын. Келесі операторды қарастырайық

$$A = (S_{Y', N} - S_{Y', N-1})G,$$

мұндағы $S_{Y', N}$ деп отырғанымыз сатылы $Q_{Y', N}$ крестке сәйкес келетін Фурье қатарының дербес қосындысының операторы, ал N – ді кейінірек таңдаймыз. Онда $A \in \mathfrak{L}_M(B)_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)}$ және A операторының мәндер облысы $\dim A_M = \bar{M} \leq M$ өлшемді $T(Q_{Y', N})$ кеңістігінің A_M ішкі кеңістігі болады. t полиномының салынуы бойынша және $L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ кеңістігінде $S_{Y', N}$ бөлік қосындысының шектелуіне байланысты кез келген тригонометриялық полином $t \in T(Q_{Y', N})$ үшін алатынымыз

$$\begin{aligned}
\|t - At\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} &= \|(S_{Y', N} - S_{Y', N-1})(t - Gt)\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \leq \\
&\leq C_1 \|t - Gt\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)}. \tag{3.1.7}
\end{aligned}$$

Айталық $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^{\bar{M}}$ – дегеніміз A_M - дегі ортонормальды базис және

$$A(e^{i(k,x)}) \sum_{m=1}^{\bar{M}} a_m^k \psi_m(x).$$

Онда

$$\left(\sum_{m=1}^{\bar{M}} |a_m^k|^2 \right)^{1/2} \leq B,$$

және кез келген тригонометриялық полином $t \in T(Q_{Y',N})$ үшін, лемма 3.1.1 мен Парсеваль теңдігіне байланысты алатынымыз

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{T}^n} \operatorname{Re} A(t(\cdot - y))(x) \Big|_{y=x} &\leq \left(\bar{M} \sum_{m=1}^{\bar{M}} \sum_k |a_m^k \hat{t}(k)|^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left(\bar{M} \sum_k |\hat{t}(k)|^2 \sum_{m=1}^{\bar{M}} |a_m^k|^2 \right)^{1/2} \leq B \left(M \sum_k |\hat{t}(k)|^2 \right)^{1/2} = \\ &= N^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j'} \left(M \sum_{(Y', s_0)=N} 2^{-\sum_{j=1}^n 2(\alpha_j+1-1/p_j)s_j^0} \sum_{k \in \rho(s_0)} 1 \right)^{1/2} \asymp \\ &\asymp N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \left(M \sum_{(Y', s_0)=N} 2^{-\sum_{j=1}^n 2(\alpha_j+1-1/p_j)s_j^0} \cdot 2^{\sum_{j=1}^n s_j^0} \right)^{1/2} = \\ &= BN^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \left(M \sum_{(Y', s_0)=N} 2^{-\sum_{j=1}^n (2(\alpha_j-1/p_j)+1)s_j^0} \right)^{1/2} = \\ &= BN^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \left(M \sum_{(\tilde{1}, \tilde{s})=N} 2^{-\sum_{j \in D} (2(\alpha_j-1/p_j)+1)s_j} \right)^{1/2} = \\ &= BN^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \left(M \sum_{(\tilde{1}, \tilde{s})=N} 2^{-(2(\alpha_{j_0}-1/p_{j_0})+1)(\tilde{1}, \tilde{s})} \right)^{1/2} \asymp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= BM^{1/2} N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \left(2^{-(2(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0}) + 1)N} N^{|D|-1} \right)^{1/2} = \\
&= 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0})N} N^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau'_j} \left(\frac{B^2 M}{2^{2N|D|-1}} \right)^{1/2}. \tag{3.1.8}
\end{aligned}$$

Одан әрі (3.1.6) және (3.1.8) арқылы алатынымыз

$$\begin{aligned}
&t(0) - \min_{x \in \mathbb{T}^n} \operatorname{Re} A(t(\cdot - y))(x) \Big|_{y=x} \geq \\
&\geq 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0})N} N^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau'_j} \left(C_2 - C_3 B \left(\frac{M}{2^{2N|D|-1}} \right)^{1/2} \right), \tag{3.1.9}
\end{aligned}$$

мұндағы C_2 – (3.1.6) төменнен бағалаудағы тұрақты, C_3 – (3.1.8) жоғарыдан бағалаудан тұрақты.

N мәнін $\left(C_2 - C_3 B \left(\frac{M}{2^{2N|D|-1}} \right)^{1/2} \right) \geq C_4 > 0$ болатындай етіп таңдаймыз.

Онда (3.1.9) – дан алатынымыз

$$\begin{aligned}
&C_4 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0})N} N^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau'_j} \leq t(0) - \min_{x \in \mathbb{T}^n} \operatorname{Re} A(t(\cdot - y))(x) \Big|_{y=x} = \\
&= t(0) - \min_{x \in \mathbb{T}^n} \operatorname{Re} \left(\sum_{\mathbf{k}} \hat{t}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}, x)} \sum_{m=1}^M a_m^{\mathbf{k}} \psi_m(x) \right) = \\
&= t(0) - \operatorname{Re} \left(\sum_{\mathbf{k}} \hat{t}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}, x_0)} \sum_{m=1}^M a_m^{\mathbf{k}} \psi_m(x_0) \right) = \\
&= \operatorname{Re} \left(t(0) - \sum_{\mathbf{k}} \hat{t}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}, x_0)} \sum_{m=1}^M a_m^{\mathbf{k}} \psi_m(x_0) \right) \leq \\
&\leq \left| t(0) - \sum_{\mathbf{k}} \hat{t}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}, x_0)} \sum_{m=1}^M a_m^{\mathbf{k}} \psi_m(x_0) \right| \leq \\
&\leq \sup_y \left| t(x_0 - y) - \sum_{\mathbf{k}} \hat{t}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}, y)} \sum_{m=1}^M a_m^{\mathbf{k}} \psi_m(x_0) \right| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_y |t(x_0 - y) - A(t(\cdot - y))(x_0)| \leq \\
&\leq \sup_y \|t(x - y) - A(t(\cdot - y)(x))\|_{L_\infty(\mathbb{T}^n)}
\end{aligned}$$

және, осыдан, келесілер орындалатындай y_0 табылады

$$\begin{aligned}
\|t(x - y_0) - A(t(\cdot - y_0)(x))\|_{L_\infty(\mathbb{T}^n)} &\geq \frac{C_4}{2} 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0})N} N^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau'_j} = \\
&= C_5 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0})N} N^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau'_j}.
\end{aligned}$$

Айталық, енді $\varphi(x) = t(x - y_0)$ болсын, онда

$$\|\varphi(x) - A\varphi(x)\|_{L_\infty(\mathbb{T}^n)} \geq C_5 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0})N} N^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\tau'_j}.$$

Осыдан 3.1.3 леммаға сай, алатынымыз

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x) - A\varphi(x)\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} &\geq C_6 2^{-N/q_{j_0}} N^{-\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\theta'_j} \|\varphi(x) - A\varphi(x)\|_{L_\infty(\mathbb{T}^n)} = \\
&= C_7 2^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/p_{j_0})N} N^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/\theta'_j - 1/\tau'_j)} \asymp \\
&\asymp M^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/p_{j_0})} \log(M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/p_{j_0}) + \sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/\theta'_j - 1/\tau'_j)}. \quad (3.1.10)
\end{aligned}$$

N -ге тәуелсіз, қандай да бір C_8 тұрақтысы бар $f = C_8 \varphi(x)$ функциясы $B_p^{\alpha\tau}$ класына жататынын ескерсек, (3.1.8) және (3.1.10) бойынша, алатынымыз

$$\begin{aligned}
\sup_{f \in B_p^{\alpha\tau}} \|f - Gf\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} &\geq C_8 \|\varphi - G\varphi\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \geq C_9 \|\varphi(x) - A\varphi(x)\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \geq \\
&\geq C_{10} M^{-(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/p_{j_0})} \log(M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_0} - 1/p_{j_0} + 1/p_{j_0}) + \sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/\theta'_j - 1/\tau'_j)}.
\end{aligned}$$

$G \in \mathfrak{L}_M(B)_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)}$ операторын таңдау еріктілігіне байланысты, (3.1.4) төменнен бағалауын аламыз.

3.2 Никольский-Бесов класының тригонометриялық көлденеңінің реті туралы

Бұл бөлімшеде $L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ Лоренцтің анизотропты кеңістіктерінің

метрикасында, $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < 2 < q = (q_1, \dots, q_n)$ шарты бойынша, $B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ Никольский-Бесов класының тригонометриялық көлденеңінің реті бағаланады

Айталық $V \subset L_1(\mathbb{T}^n)$ – нормаланған кеңістік және $F \subset V$ – қандай да бір функционалдық класс. V кеңістігінде F класының тригонометриялық көлденеңі келесі түрде анықталады ([57, с. 162-167] қараңыз).

$$d_M^T(F, V) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Omega_M; x)} \|f(\cdot) - t(\Omega_M; \cdot)\|_V,$$

мұндағы $t(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, x)}$, $\Omega_M = \{k^1, \dots, k^M\}$ – бүтінсанды \mathbb{Z}^n тордағы $k^j = (k_1^j, \dots, k_n^j)$ векторлар жиынтығы, c_j – қандай да бір сандар ($j = 1, \dots, M$).

Бір өлшемді жағдайда тригонометриялық көлденең ұғымын алғаш рет Р.С. Исмагилов енгізді [57] және ол үздіксіз функциялар кеңістігіндегі кейбір кластар үшін оның бағаларын белгіледі. L_q кеңістігінде W_p^r Соболев, H_p^r Никольский кластарында көп айнымалылы функциялардың тригонометриялық көлденеңдерінің дәл реттерін Э.С. Белинский [58], В.Е. Майоров [59], Ю. Маковоз [60], Г.Г. Магарил-Ильяев [61], В.Н. Темляков [53, р. 162-182] орнатты. Бұл есепті Бесов кластары үшін А.С. Романюк [16, с. 72-86], Д.Б. Базарханов [23, с. 54-64] зерттеді. Никольский-Бесовтың анизотропты кластары жағдайында бұл есепті К.А. Бекмаганбетов және Е. Толеугазы [31, с. 237-247] зерттеді.

Біз $L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ Лоренцтің анизотропты кеңістіктерінің) метрикасындағы $B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ Никольский-Бесов класының тригонометриялық көлденеңдерінің ретін бағалау есептерін зерттейміз.

Көмекші тұжырымдар берейік.

Айталық Ω_M – жиыны, M –нен аспайтын $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ векторларды қамтыйды.

Лемма 3.2.1. ([578, с. 162-165]). Айталық $2 \leq q < \infty$. Онда, кез келген тригонометриялық полином

$$P(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^M e^{i(k^j, x)}$$

үшін және кез келген $N \leq M$ саны үшін N –нен аспайтын гармоникасы бар $P(\Omega_N; x)$ тригонометриялық полином және

$$\|P(\Omega_M, \cdot) - P(\Omega_N, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{T}^n)} \leq CMN^{-1/2}$$

болады, сондай-ақ, $P(\Omega_N, x)$ барлық коэффициенттері біркелкі $\Omega_N \subset \Omega_M$, және MN^{-1} санынан аспайды.

Салдар 3.2.1. ([57, с. 148-150]). Айталық $2 < q = (q_1, \dots, q_n)$, $0 < \theta =$

$(\theta_1, \dots, \theta_n) \leq \infty$. кез келген тригонометриялық полином

$$P(\Omega_M; x) = \sum_{j=1}^M e^{i(k^j, x)}$$

үшін және кез келген $N \leq M$ саны үшін

$$\|P(\Omega_M, \cdot) - P(\Omega_N, \cdot)\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \leq CMN^{-1/2}$$

болатындай, N – нен аспайтын гармоникасы бар $P(\Omega_N; x)$ тригонометриялық полином табылады, және де $\Omega_N \subset \Omega_M$ барлық $P(\Omega_N, x)$ коэффициенттері бірдей және MN^{-1} – мәнінен аспайды.

Әрбір $s \in \mathbb{Z}_+^n$ үшін сызықтық оператор қарастырамыз

$$(T_{N_s} f)(x) = f(x) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)} - t(\Omega_{N_s}, x) \right),$$

мұндағы $t(\Omega_{N_s}, x)$ – жуықталатан $t_{N_s}(x) = \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, x)}$ «блогы», 2.3.1 салдарынан алынған, тригонометриялық полином.

Лемма 3.2.2. Айталық $1 < p < 2$, барлық $j = 1, \dots, n$ және $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \leq \infty$ үшін $2 < q_j < p'$ болатындай, $q = (q_1, \dots, q_n)$ мультииндекс болсын. Онда $L_p(\mathbb{T}^n)$ - ден $L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)$ - ге әсер ететін T_{N_s} операторының нормасы

$$\|T_{N_s}\|_{L_p(\mathbb{T}^n) \rightarrow L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \leq C 2^{(1,s)} N_s^{-(1/2+1/p')}$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Дәлелдеуі. $t(\Omega_{N_s}, x)$ полиномының коэффициенттері бірдей және $2^{(1,s)} N_s^{-1}$ мәнінен аспайтынын ескере отырып, Парсеваль теңдігіне байланысты алатынымыз

$$\|T_{N_s}\|_{L_2(\mathbb{T}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^n)} \leq C_1 2^{(1,s)} N_s^{-1}. \quad (3.2.1)$$

Әрі қарай, Минковскийдің жалпыланған теңсіздігін және 3.2.1 салдарын пайдаланып, жаза алатынымыз

$$\|T_{N_s} f\|_{L_{q^*\theta^*}(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{T}^n)} \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, \cdot)} - t(\Omega_{N_s}, \cdot) \right\|_{L_{q^*\theta^*}(\mathbb{T}^n)} \leq$$

$$\leq C_2 2^{(1,s)} N_s^{-1/2} \|f\|_{L_1(\mathbb{T}^n)}.$$

Осыдан $\|T_{N_s}\|_{L_1(\mathbb{T}^n) \rightarrow L_{q^* \theta^*}(\mathbb{T}^n)}$ анықтамасына сай, табатынымыз

$$\|T_{N_s}\|_{L_1(\mathbb{T}^n) \rightarrow L_{q^* \theta^*}(\mathbb{T}^n)} \leq C_2 2^{(1,s)} N_s^{-1/2}. \quad (3.2.2)$$

Әрі қарай, Лебег кеңістігі мен Лоренц анизотропты кеңістігі үшін Рисс-Ториннің интерполяциялық теоремасын қолдансақ

$$\|T_{N_s}\|_{L_1(\mathbb{T}^n) \rightarrow L_{q^* \theta^*}(\mathbb{T}^n)} \leq \|T_{N_s}\|_{L_2(\mathbb{T}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^n)}^{1-\lambda} \|T_{N_s}\|_{L_1(\mathbb{T}^n) \rightarrow L_{q^* \theta^*}(\mathbb{T}^n)}^\lambda, \quad (3.2.3)$$

мұндағы $0 < \lambda < 1$ және $1/p = (1 - \lambda)/2 + \lambda/1$, $1/q = (1 - \lambda)/2 + \lambda/q^*$ және $1/\theta = (1 - \lambda)/2 + \lambda/\theta^*$.

(3.2.1) және (3.2.2) мәндерін (3.2.3) қойып, Ондаэлементар түрлендірулерді орындаған соң, $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < p' = (p'_1, \dots, p'_n)$ қосымша шарты бар қажетті бағалауға келеміз. $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ параметрінің қалған мәндері үшін тұжырымның дұрыстығы $0 < \theta_1 = (\theta_1^1, \dots, \theta_n^1) \leq \theta_2 = (\theta_1^2, \dots, \theta_n^2) \leq \infty$ болғандағы $L_{q\theta_1}(\mathbb{T}^n) \rightarrow L_{q\theta_2}(\mathbb{T}^n)$ енуінен шығады.

Лемма толықтай дәлелденді.

Бөлімнің негізгі нәтижесі келесі тұжырым болып табылады.

Теорема 3.2.1. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < 2 < q = (q_1, \dots, q_n) < p'_0 = (p'_{01}, \dots, p'_{0n})$, $p_0 = \max\{p_j : j = 1, \dots, n\}$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \leq \infty$ және $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ бұл, барлық $j = 1, \dots, n$ үшін $\alpha_j > 1 + 1/p_j - 1/p_0$. Айталық, әрі қарай, $q_j = q_{j_1}$ барлық $j \in D$ үшін және $q_j \geq q_{j_1}$ барлық $j \notin D$ үшін $\zeta = \min\{\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j : j = 1, \dots, n\}$, $D = \{j = 1, \dots, n : \alpha_j - 1/p_j + 1/q_j = \zeta\}$, $j_1 = \min\{j : j \in D\}$ болсын.

Онда келесі қатынас дұрыс болады

$$\begin{aligned} & d_M^T(B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n), L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)) \asymp \\ & \asymp M^{-(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/2)} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/2) + \sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/2 - 1/\tau_j)_+}, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

мұндағы $|D| - D$ жиынының элементтер саны, $a_+ = \max(a, 0)$.

Дәлелдеуі. Айталық $f \in B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$. Ерікті натурал сан M үшін $M \asymp 2^m m^{(|D|-1)}$ болатындай m натурал саны табылады. $P(\Omega_M; x)$ жуықттау полиномын келесі түрде іздестіреміз

$$P(\Omega_M; x) = \sum_{(\gamma', s)} \Delta_s(f, x) + \sum_{m \leq (\gamma', s) < \beta m} t(\Omega_{N_s}; x) * \Delta_s(f, x) \quad (3.2.5)$$

мұндағы

$$\beta = \frac{\left(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/2 - \frac{\log m}{m} \sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} \left((1/2 - 1/\tau_j)_+ - (1/\theta_j - 1/\tau_j)_+ \right)\right)}{(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/q_{j_1})},$$

$j \in D$ кезінде $\gamma_j = (\alpha_j - 1/p_j + 1/q_j)/(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/q_{j_1})$, $j = 1, \dots, n$, $\gamma'_j = \gamma_j$ және $j \notin D$ кезінде $1 < \gamma'_j < \gamma_j$. Сондай-ақ, $t(\Omega_{N_s}; x)$ полиномдары әрбір $t_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}$ “блок” үшін $N_s = \left[2^{(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/p_0)m} 2^{-(\alpha - 1/p + 1/p_0 - 1, s)} \right]$ санына, 3.2.1 салдарына сай, таңдалады.

Лемма 3.2.2 жағдайына сай, ескеретініміз

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq (\gamma', s) < \beta m} N_s &= 2^{(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/p_0)m} \sum_{m \leq (\gamma', s) < \beta m} 2^{-(\alpha - 1/p + 1/p_0 - 1, s)} \leq \\ &\leq 2^{(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/p_0)m} \left\| \left\{ 2^{-(\alpha - 1/p + 1/p_0 - 1, s)} \right\}_{s \in Y^n(m, \gamma')} \right\|_{l_1} \leq \\ &\leq 2^{(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/p_0)m} 2^{-(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/p_0)m} m^{(|D|-1)} = 2^m m^{(|D|-1)} = M, \end{aligned}$$

себебі $j \notin D$ кезінде $(\alpha_j - 1/p_j + 1/p_0 - 1)/(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/p_0 - 1) > \gamma'_j$.

(3.2.5) теңдігі мен Минковский теңсіздігінің негізінде, алатынымыз

$$\begin{aligned} &\|f(\cdot) - P(\Omega_M; \cdot)\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \leq \\ &\leq C_1 \left(\left\| \sum_{m \leq (\gamma', s) < \beta m} (\Delta_s(f, \cdot) - \Delta_s(f, \cdot) * t(\Omega_{N_s}; \cdot)) \right\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{(\gamma', s) \geq \beta m} \Delta_s(f, \cdot) \right\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \right) = \\ &= C_1(I_1(f) + I_2(f)). \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Алдымен $I_2(f)$ бағалаймыз. теорема 3.2.1 жағдайына сай алатынымыз

$$I_2(f) \leq C_2 \left\| \left\{ 2^{(1/p - 1/q, s)} \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^n)} \right\}_{s \in Y^n(\beta m, \gamma')} \right\|_{l_\theta} \leq I_3(f). \tag{3.2.7}$$

Параметрлері $1/\theta = 1/\tau + 1/\varepsilon$, мұндағы $1/\varepsilon = (1/\theta - 1/\tau)_+$ Гельдер теңсіздігіне және 2.2.2 леммасына сай, $\gamma' \leq \gamma$ екенін ескере отырып, алатынымыз

$$\begin{aligned}
I_3(f) &= \left\| \left\{ 2^{(\alpha,s)} \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \cdot 2^{-(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/q_{j_1})(\gamma,s)} \right\}_{s \in Y^n(\beta m, \gamma')} \right\|_{l_\theta} \leq \\
&\leq \left\| \left\{ 2^{(\alpha,s)} \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right\}_{s \in Y^n(\beta m, \gamma')} \right\|_{l_\tau} \times \\
&\times \left\| \left\{ 2^{-(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/q_{j_1})(\gamma,s)} \right\}_{s \in Y^n(\beta m, \gamma')} \right\|_{l_\varepsilon} \leq \\
&\leq C_3 \|f\|_{B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)} \cdot 2^{-(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/q_{j_1})\beta m} m^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\varepsilon_j} \leq \\
&\leq C_3 2^{-(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/q_{j_1})\beta m} m^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/\theta_j - 1/\tau_j)_+}. \tag{3.2.8}
\end{aligned}$$

(3.2.8) -ді (3.2.7) – ге қойып, алатынымыз

$$I_2 \leq C_4 2^{-(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/q_{j_1})\beta m} m^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/\theta_j - 1/\tau_j)_+}.$$

Әрі қарай, β мәнін қою арқылы, алатынымыз

$$2^{-(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/q_{j_1})\beta m} = 2^{-(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/2})\beta m} m^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/2 - 1/\tau_j)_+},$$

демек

$$I_2(f) \leq C_4 2^{-(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/2})\beta m} m^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/2 - 1/\tau_j)_+}.$$

$M = 2^m m^{(|D|-1)}$ екенін ескеріп, алатынымыз

$$I_2(f) \leq C_5 M^{-(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/2})} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_1-1/p_{j_1}+1/2}) + \sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/2 - 1/\tau_j)_+}. \tag{3.2.9}$$

Енді $I_1(f)$ шамасын бағалаймыз. Литтлвуд-Пэли ([2, с. 43-44] қараңыз) теоремасын қолданып, алатынымыз

$$I_1(f) = \left\| \sum_{m \leq (\gamma', s) < \beta m} \left(\Delta_s(f, \cdot) - \Delta_s(f, \cdot) * t(\Omega_{N_s}; \cdot) \right) \right\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_6 \left(\left\| \sum_{m \leq (\gamma', s) < \beta m} (\Delta_s(f, \cdot) - \Delta_s(f, \cdot) * t(\Omega_{N_s, \cdot})) \right\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)}^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq C_6 \left\| \left\{ \left\| \Delta_s(f, \cdot) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k, \cdot)} - t(\Omega_{N_s, \cdot}) \right) \right\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \right\}_{s \in \mathfrak{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_2} = \\
&= C_6 \left\| \left\{ \|T_s \Delta_s(f, \cdot)\|_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)} \right\}_{s \in \mathfrak{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_2} \quad (3.2.10)
\end{aligned}$$

мұндағы $\mathfrak{K}^n(m, \beta m, \gamma') = \{s \in \mathbb{Z}_+^n : m \leq (\gamma', s) < \beta m\}$.

Лемма 3.2.2 және $1 < p_j < p_0$ ($j = 1, \dots, n$) кезінде, аралас метрикалы Лебегтің кеңістігіндегі тригонометриялық полиномдар үшін әр түрлі метрикалы теңсіздігін қолданып, (3.2.10) – тен алатынымыз

$$\begin{aligned}
I_1(f) &\leq C_7 \left\| \left\{ 2^{(1,s)} N_s^{-(1/2+1/p'_0)} \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_{p_0}(\mathbb{T}^n)} \right\}_{s \in \mathfrak{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_2} \leq \\
&\leq C_8 \left\| \left\{ 2^{(1,s)} N_s^{-(1/2+1/p'_0)} 2^{(1/p+1/p_0, s)} \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right\}_{s \in \mathfrak{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_2} = \\
&= C_8 \left\| \left\{ N_s^{-(1/2+1/p'_0)} 2^{-(\alpha-1/p+1/p_0-1, s)} \cdot 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right\}_{s \in \mathfrak{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_2} \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

$1/2 = 1/\tau + 1/\varepsilon$, мұндағы $1/\varepsilon = (1/2 - 1/\tau)_+$, параметрлі Гельдер теңсіздігін пайдаланып, онда (2.3.11) –ден алатынымыз

$$\begin{aligned}
I_1(f) &\leq C_8 \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \right\}_{s \in \mathfrak{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_\tau} \times \\
&\times \left\| \left\{ N_s^{-(1/2+1/p'_0)} 2^{-(\alpha-1/p+1/p_0-1, s)} \right\}_{s \in \mathfrak{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_\varepsilon} \leq \\
&\leq C_8 \|f\|_{B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)} \left\| \left\{ N_s^{-(1/2+1/p'_0)} 2^{-(\alpha-1/p+1/p_0-1, s)} \right\}_{s \in \mathfrak{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_\varepsilon} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq C_8 \left\| \left\{ N_s^{-(1/2+1/p'_0)} 2^{-(\alpha-1/p+1/p_0-1,s)} \right\}_{s \in \mathbb{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_\varepsilon} \quad (3.2.12)$$

кез келген $f \in B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ функция үшін.

(3.2.12) жалғастыра отырып, 3.2.2 леммаға сай, алатынымыз

$$\begin{aligned} I_1(f) &\leq C_8 2^{-(1/2+1/p'_0)(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/p_0)m} \times \\ &\times \left\| \left\{ 2^{(1/2+1/p'_0)(\alpha-1/p+1/p_0-1,s)} \cdot 2^{-(\alpha-1/p+1/p_0-1,s)} \right\}_{s \in \mathbb{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_\varepsilon} = \\ &= C_8 2^{-(1/2+1/p'_0)(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/p_0)m} \times \\ &\times \left\| \left\{ 2^{-(1/2+1/p'_0)(\alpha-1/p+1/p_0-1,s)} \right\}_{s \in \mathbb{K}^n(m, \beta m, \gamma')} \right\|_{l_\varepsilon} \leq \\ &\leq C_8 2^{-(1/2+1/p'_0)(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/p_0)m} \left\| \left\{ 2^{-(1/2+1/p'_0)(\alpha-1/p+1/p_0-1,s)} \right\}_{s \in Y^n(m, \gamma')} \right\|_{l_\varepsilon} \leq \\ &\leq C_9 2^{-(1/2+1/p'_0)(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/p_0)m} 2^{-(1/2+1/p'_0)\left(\alpha_{j_1}-\frac{1}{p_{j_1}}+\frac{1}{p_0}-1\right)m} m^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} 1/\varepsilon_j} = \\ &= C_9 2^{-(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/2)m} m^{\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/2-1/\tau_j)_+}, \end{aligned}$$

себебі $j \notin D$ кезінде $(\alpha_j - 1/p_j + 1/p_0 - 1)/(\alpha_{j_1} - 1/p_{j_1} + 1/p_0 - 1) > \gamma'_j$.

$M = 2^m m^{(|D|-1)}$ екенін ескеріп, алатынымыз

$$I_2(f) \leq C_{10} M^{-(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/2)} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/2)+\sum_{j \in D \setminus \{j_1\}} (1/2-1/\tau_j)_+}. \quad (3.2.13)$$

(3.2.9) және (3.2.13) мәндерін (3.2.6) қойып, (3.2.4) – те жоғарыдан бағалау беретін, теңсіздік аламыз.

Төменнен бағалауды дәлелдеу үшін келесі шаманы қарастырамыз

$$e_M(F)_V = \sup_{f \in F} e_M(F)_V = \sup_{f \in F} \inf_{\{b_j, k_j\}_{j=1}^M} \left\| f - \sum_{j=1}^M b_j e^{i(k_j, x)} \right\|_V$$

Оны F класының ең жақсы мүшелік жуықтауы деп атайды. Анықтамалардан шығатын дұрыс теңсіздік

$$e_M(F)_V \leq d_M^T(F, V).$$

$e_M(F)_V$ үшін төменнен бағалаулар $d_M^T(F, V)$ үшін де төменнен бағалаулар болады.

$2 < q_j$ ($j = 1, \dots, n$) шарты бойынша алатынымыз

$$e_M(f)_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leq C_{11} e_M(f)_{L_{q\theta}(\mathbb{T}^n)}.$$

Әрі қарай, төменнен бағалауды дәлелдеу үшін, С.М. Никольскийдің ([2, с. 248-250]) жалпы нәтижесінен туындайтын қосарланған қатынасты қолданамыз. Кез-келген $f \in L_2(\mathbb{T}^n)$ функция үшін, осы қатынасқа сәйкес, келесі теңдік орын алады

$$e_M(f)_{L_2(\mathbb{T}^n)} = \inf_{\Omega_M} \sup_{P \in \mathcal{L}^\perp, \|P\|_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(x) P(x) dx \right|, \quad (3.2.14)$$

мұндағы \mathcal{L} – функциялар $\{e^{i(k,x)}\}_{k \in \Omega_M}$ жүйесінің сызықтық қабығы

Келесі функцияны қарастырайық

$$f(x) = m^{-\sum_{j \in D' \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \sum_{m \leq (\gamma', s_0) < m+n} \prod_{j=1}^n 2^{-(\alpha_j+1-1/p_j)s_j^0} \sum_{k \in \rho(s_0)} e^{i(k,x)},$$

мұндағы $D' = \{j \in D: 2 < \tau_j\} \cup \{j_1\}$, $s_0 = (s_1^0, \dots, s_n^0)$, $j \in D'$ кезінде $s_j^0 = s_j$ және $j \notin D'$ кезінде $s_j^0 = 0$.

[31, р. 246-247] жұмыста, $C_{12}f(x)$ функциясы $B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n)$ класына жататыны көрсетілген.

(3.2.14) шартын қанағаттандыратын $P(x)$ функциясын қарастырамыз.

Айталық

$$u(x) = \sum_{(\gamma', s_0) < m} \sum_{k \in \rho(s_0)} e^{i(k,x)}, \quad (3.2.15)$$

және Ω_M – бүтінсанды $k = (k_1, \dots, k_n)$ векторлардың ерікті жиынтығы.

Келесі белгілеу

$$v(x) = \sum_{(\gamma', s_0) < m} \sum_{k \in \rho(s_0) \cap \Omega_M} e^{i(k,x)}$$

арқылы (3.2.15) тең, тек $k \in \Omega_M$ болатындай қосындыларды ғана қамтитын функцияны белгілейік. Минковский теңсіздігінен және Парсеваль теңдігінен $\omega(x) = u(x) - v(x)$ функциясы үшін алатынымыз

$$\|\omega\|_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leq C_{13}M^{1/2}.$$

$P(x) = C_{13}^{-1}M^{-\frac{1}{2}}\omega(x)$ функциясын қарастырамыз, онда $\|P\|_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leq 1$. Және де $\omega(x) = u(x) - v(x)$ функциясының Ω_M - нен гармоникасы болмағандықтан, онда функция $P \in \mathcal{L}^\perp$. Осылайша, $P(x)$ функциясы (3.2.14) шарттарын қанағаттандырады.

(3.2.14) теңдігі және лемма 3.2.2 - ден алатынымыз

$$\begin{aligned} e_M(f)_{L_2(\mathbb{T}^n)} &\geq C_{14}M^{-1/2} \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\omega(x)dx \right| \geq \\ &\geq C_{14}M^{-1/2}m^{-\sum_{j \in D' \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \sum_{(\gamma', s_0)=m} \prod_{j=1}^n 2^{-(\alpha_j+1-1/p_j)s_j^0} \sum_{k \in \rho(s_0)} 1 = \\ &\geq C_{14}M^{-1/2}m^{-\sum_{j \in D' \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \sum_{(\gamma', s_0)=m} \prod_{j=1}^n 2^{-(\alpha_j-1/p_j)s_j^0} = \\ &= C_{14}M^{-1/2}m^{-\sum_{j \in D' \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \left\| \left\{ 2^{-(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1})(1,s)} \right\}_{\mathbb{K}^{|D|(1,s)} \right\|_{l_1} = \\ &\asymp M^{-1/2}m^{-\sum_{j \in D' \setminus \{j_1\}} 1/\tau_j} \cdot 2^{-(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1})m} m^{(|D|-1)}, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

мұндағы $\bar{s} = (s_{j_1}, \dots, s_{j_{|D|}})$.

(3.2.16) бойынша, $M \asymp 2^m m^{(|D|-1)}$ екенін ескеріп, алатынымыз

$$\begin{aligned} e_M(f)_{L_2(\mathbb{T}^n)} &\geq C_{15}2^{-(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/2)m} m^{\sum_{j \in D' \setminus \{j_1\}} (1/2-1/\tau_j)_+} = \\ &= C_{16}M^{-(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/2)} (\log M)^{(|D|-1)(\alpha_{j_1}-1/p_{j_1}+1/2)+\sum_{j \in D' \setminus \{j_1\}} (1/2-1/\tau_j)_+} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

(3.2.17) бойынша (3.2.4) төменгі бағасы шығады.

Теорема толық дәлелденді.

Ескерту 3.2.2. $p = r = (p, \dots, p)$, $\tau = (\tau, \dots, \tau)$, және $q = \theta = (q, \dots, q)$ кезінде, дәлелденген теореманың тұжырымы А.С.Романюк жұмысының нәтижесімен сәйкес келетінін айта кетеміз.

ҚОРЫТЫНДЫ

Көп айнымалылардың функциясы теориясында маңызды және қиын есептердің бірі әр айнымалы бойынша әр түрлі дифференциалдық және метрикалық қасиеттері бар функциялар кластарын зерттеу болып табылады.

Бұл жұмыста интерполяциялық қасиеттер зерттеліп, Бесовтың анизотропты кеңістіктері үшін ену және жалғастыру теоремалары алынды, осы кеңістіктердегі жуықтау теориясының бірқатар есептері зерттелді.

Жұмыста алынған негізгі нәтижелер келесідей:

– Никольский-Бесовтың $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ және $S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)$ кеңістіктері енгізілді, олардың интерполяциялық қасиеттері сипатталды;

– Никольский-Бесовтың $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ және $S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)$ кеңістіктері үшін әртүрлі метрикалардың шекті ену теоремалары дәлелденді;

– Никольский-Бесовтың $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ және $S_p^{\alpha q}B(\mathbb{R}^n)$ кеңістіктерінің іздері мен жалғасы туралы теоремалар дәлелденді;

– $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$ және $\alpha - 1/p + 1/q > 0$ кезінде Лоренцтің $L_{pr}(\mathbb{T}^n)$ анизотропты кеңістіктерінің метрикасында Никольский-Бесов $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^n)$ класының ортопроекциялық көлденеңінің реті есептелді;

– $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < 2 < q = (q_1, \dots, q_n) < p'_0$ және $\alpha > 1 + 1/p - 1/p_0$, $p_0 = (p_0, \dots, p_0)$ және $p_0 = \max\{p_j: j = 1, \dots, n\}$ кезінде Лоренцтің $L_{pr}(\mathbb{T}^n)$ анизотропты кеңістіктерінің көлденеңінің реті есептелді.

Жұмыстың нәтижелері теориялық сипатта болып табылады және математиканың әртүрлі бөлімдерінде қолданыла алады: функционалды кеңістіктердің интерполяция теориялары, функционалдық кеңістіктердегі ену теоремалары, математикалық физиканың шеткі есептер теориялары, жуықтау теориялары және есептеу математикасы.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Соболев С. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сб. – 1938. – Т. 4(46), № 3. – С. 471 – 497.
- 2 Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их приложение в теории дифференциальных функций многих переменных. // Труды МИ АН СССР. – 1951. – Т. 38.– С. 244 – 278.
- 3 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- 4 Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Труды МИ АН СССР. – 1961. – Т. 60. – С. 42 – 81.
- 5 Лизоркин И.П. Пространства $L_p^r(\Omega)$. Теоремы продолжения и вложения // Докл. АН СССР. – 1962. –Т. 145.– С. 527-530.
- 6 Triebel H. Spaces of distributions of Besov type on Euclidean n -space. Duality, interpolation // Ark. Mat. – 1973. – V. 11, № 1–2.– P. 13 – 64.
- 7 Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гёльдера // Сиб. мат. журн. – 1963. – Т. 4, № 6. – С. 1342 – 1364.
- 8 Джабраилов А.Д. О некоторых функциональных пространствах. Прямые и обратные теоремы вложения // Доклады АН СССР. –1964. – Т. 159, № 2. – С. 254 – 257.
- 9 Аманов Т.И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S_{p,\theta}^{(r)}B(R_n)$ и $S_{p^*,\theta}^{(r)}B$ ($0 < x_j < 2\pi; j = 1, \dots, n$) // Труды МИ АН СССР. – 1965. – Т. 77. – С. 5 – 34.
- 10 Аманов Т.И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 224 с.
- 11 Унинский А.П. Теоремы вложения для класса функций со смешанной нормой // Доклады АН СССР. – 1966. – Т. 166, № 4. – С. 806 – 808.
- 12 А.П. Унинский, “Теоремы вложения для классов функций со смешанной нормой // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10, № 1. – С. 158 – 171.
- 13 Темляков В.Н. Приближение функции с ограниченной смешанной производной // Труды МИ АН СССР. – 1986. – Т.178. – С. 1 – 112.
- 14 Romanyuk A.S. Best approximations and widths of classes of periodic functions of several variables // Sbornik: Math. 199 (2008), no. 2, 253 – 275.
- 15 Romanyuk A.S. Best trigonometric and bilinear approximations of classes of functions of several variables // Math. Notes 94 (2013), no. 3, 379 – 391.
- 16 Романюк А.С. Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных // Мат. сбор. – 2006. –

Т. 197, № 1. – С. 71 – 96.

17 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Доклады РАН. – 2004. – Т. 394, № 1. – С. 1 – 4.

18 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости // Матем. сб., – 2003, – Т. 194, № 10, – С. 133–160.

19 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О восстановлении мультипликативных преобразований функций из анизотропных пространств // Сиб. матем. журн., – 2014, – Т. 55, № 3, – С. 592–609.

20 Акишев Г.А. Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // Матем. сб., – 2006, – Т. 197, № 8, – С. 17–40

21 Акишев Г.А. Об ортопоперечниках классов Никольского и Бесова в пространствах Лоренца // Изв. вузов. Матем., – 2009, № 2, – С. 25–33

22 Акишев Г.А. О точности оценок наилучшего M -членного приближения класса Бесова // Сиб. электрон. матем. изв., – 2010, – Т. 7, – С. 255–274

23 Базарханов Д.Б. Характеризации функциональных пространств Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля смешанной гладкости // Труды МИАН. – 2003. – Т. 243. – С. 53 – 65.

24 Тлеуханова Н.Т. Интерполяционная формула для мультипликативных преобразований функций многих переменных // Доклады РАН. – 2003. – Т. 390, № 2. – С. 169 – 171.

25 Бекмаганбетов К.А. О порядках приближения класса Бесова в метрике анизотропных пространств Лоренца // Уфимский мат. журнал. – 2009. – Т. 1, № 2. – С. 9 – 16.

26 Bekmaganbetov K.A. Order of Approximation of Besov Classes in the Metric of Anisotropic Lorentz Spaces // Chapter Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory Part of the series Applied and Numerical Harmonic Analysis, – 2016, – P. 149–159.

27 Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Y. Order of the orthoprojection widths of the anisotropic Nikol'skii–Besov classes in the anisotropic Lorentz space // Eurasian Math. J., 2016, V. 7, № 3, P. 8–16.

28 Толеугазы Е. Теоремы вложения, теоремы о следах и продолжении для анизотропных пространств Никольского-Бесова // Вестник КарГУ, Караганды: Караганды университеті. № 4, 2016, С. 146-154.

29 Бекмаганбетов К.А., Толеугазы Е. Интерполяционные свойства анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{\text{pr}}^{\alpha q}(T^d)$ и теоремы вложения // Вестник КазНУ, серия: математика, механика, информатика. Алматы: "Қазақ университеті". № 3 (91), 2016, с. 3-18.

- 30 К.А. Бекмаганбетов, Е.Т. Оразгалиев. Неравенства Бернштейна-Никольского и оценки наилучших приближений в анизотропных пространствах Лоренца // Математический журнал (Казахстан), том 15, № 2(56), 2015 с. 32-42.
- 31 Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Y. On the order of the trigonometric diameter of the anisotropic Nikol'skii-Besov class in the metric anisotropic Lorentz spaces // Analysis Mathematica. 2019, том 45, №2, с. 237-247.
- 32 Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Анизотропты Лоренц кеңістігіндегі метрикасындағыаралас метрикалы Никольский-Бесов класындағы тригонометриялық көлденеңнің реті. Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.-2020. – №1(97). Б. 17-26
- 33 Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Интерполяционная теорема для пространств типа Никольского-Бесова со смешанной метрикой. Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.-2020. – №4(100). Б. 33-42.
- 34 Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Жалпыланған аралас тегістілігі бар Никольский-Бесовтың анизотропты кеңістіктері үшін енгізу теоремалары. Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.-2021. – №4(104). Б. 28-34.
- 35 Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Анизотропты Лоренц кеңістігінің метрикасындағы Никольский-Бесов класының ортопроекция енінің ретін бағалау. Математика ғылымдарының журналы, Том. 264, № 5, Шілде, 2022.– Б. 552-561.
- 36 Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Жалпыланған аралас тегістілігі бар Никольский-Бесов кеңістіктеріндегі функциялар үшін іздер және жалғасулар теоремалары. Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.-2022.- № 4 (108), Б. 42-50.
- 37 Е. Төлеуғазы, Қ.Е. Кервенев. Үстем аралас туындысы және аралас метрикасы бар анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктері және анизотропты Лоренцкеңістіктері үшін ену теоремаларының жетілдірілмейтіндігі туралы // Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.- 2024 114 (2) , Б.186-196 (Web of Science (ESCI Q2), Scopus 46%) DOI10.31489/2024M2/186-196.
- 38 К.А. Бекмаганбетов, Қ.Е. Кервенев, Е.Д. Нурсултанов. Nikol'skii-Besov spaces with a dominant mixed derivative and with a mixed metric: interpolation properties, embedding theorems, trace and extension theorems// Eurasian Mathematical Journal, - 2025. -№2 (16), pp. 30–41. (Scopus, процентиль - 67) DOI: <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2025-16-2-30-41>.
- 39 Е. Төлеуғазы, Қ.Е. Кервенев, С.А. Исаков. Жалпыланған аралас тегістілігі бар Никольский–Бесов кеңістігінің шекаралық функциялары// Абай атындағы ҚазҰПУ-нің ХАБАРШЫСЫ, «Физика-математика ғылымдары» сериясы.- 2025.- 1(89). (ҒЖБССҚК). DOI: 10.51889/2959-5894.2025.89.1.007.
- 40 Бекмаганбетов К.А., Кервенев К.Е., Төлеуғазы Е. Теоремы вложения для пространств Никольского-Бесова со смешанной метрикой// Традиционная межд. апрельская науч. конф. в честь Казахстанского дня работников науки,

посвященная 75-летию академика Т.Ш.Кальменова: Тезисы докладов.-Алматы, 2021.- С.20-21.

41 Бекмаганбетов К.А., Кервенев К.Е., Толеугазы Е. Интерполяционные свойства и теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского–Бесова с обобщенной смешанной гладкостью.// Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 30-летию Независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала Московского университета. Нур-Султан, 4 июня 2021 г.-С. 72-76.

42 Бекмаганбетов К.А., Кервенев К.Е., Толеугазы Е. Теоремы о следах и продолжении для пространств Никольского-Бесова со смешанной метрикой в анизотропных пространствах Лоренца// Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. Материалы IX международной научной конференций. Актобе, 24-28 мая 2022 г. С. 119-121.

43 Бекмаганбетов К.А., Кервенев К.Е. Пространства НикольскогоБесова с доминирующей смешанной производной и со смешанной метрикой: теоремы вложения разных метрик и измерений.//Международная научно-практическая конференция «анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» посвященная 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук, профессора Т.И. Аманова. Астана, 22-23 июня 2023 г. С. 21-24.

44 Asekritova I., Krugljak N., Maligranda L., Nikolova L. and Persson L.-E. Lions-Peetre reiteration formulas for triples and their applications // *Studia Math.* – 2001, – V. 145, – P. 219 – 254.

45 Bekmaganbetov K.A. and Nursultanov E.D. Method of multiparameter interpolation and embedding theorems in Besov spaces $B_{p}^{\vec{\alpha}}[0,2\pi)$ // *Analysis Math.* – 1998, – V. 24. – P. 241 – 263.

46 Крепкогорский В.Л. Interpolation in Lizorkin-Triebel and Besov spaces // *Mat. sbornik.* – 1994, – V. 73, № 4. – P. 63 – 76.

47 Крепкогорский В.Л. Realization of interpolation Sparr method in the class of spaces of smooth funtions // *Matem. Zametki.* – 2001, – V. 70, № 4. – P. 581 – 590.

48 Peetre J. Thoughts on Besov spaces: Lecture notes. – Lund. – 1966.

49 Бекмаганбетов К.А. Теорема интерполяции для пространств $l_q^{\sigma}(L_{p\tau})$ и $L_{p\tau}(l_q^{\sigma})$ // *Вестник КазНУ.* – 2008, –Т. 56 № 1. – С. 30 – 42.

50 В.И. Буренков, М.Л. Гольдман, “Вычисление нормы положительного оператора на конусе монотонных функций”, Теория функций и дифференциальные уравнения, Сборник статей. К девяностолетию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, 210, Наука, М., 1995, С.65–89

51 М.Л. Гольдман, “О вложении пространства Никольского–Бесова в весовое пространство Лоренца”, Теория функций и смежные вопросы анализа, Труды

конференции по теории функций, посвященной 80-летию академика Сергея Михайловича Никольского (Днепропетровск, 29 мая–1 июня 1985 г.), Тр. МИАН СССР, 180, Наука, М., 1987, -С. 93–95

52 Temlyakov V.N. Widths of some classes of functions of several variables //Soviet Math. Dokl. 26 (1982), 619 – 622.

53 Temlyakov V.N. Estimates for the asymptotic characteristics of classes of functions with bounded mixed derivative or difference //Proc. Steklov Inst. Math. 189 (1990), 161 – 197.

54 Galeev E.M. Orders of the orthoprojection widths of classes of periodic functions of one and of several variables// Math. Notes 43 (1988), no. 2, 110 – 118.

55 Galeev E.M. Approximation of classes of periodic functions of several variables by nuclear operators //Math. Notes 47 (1990), no. 3, 248 – 254.

56 Andrianov A.V., Temlyakov V.N. On two methods of generalization of properties of univariate function systems to their tensor product// Proc. Steklov Inst. Math. 219 (1997), 25 – 35.

57 Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // УМН. – 1974. – Т. 29, вып. 3. – С. 161 – 178

58 Белинский Э.С. Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 284, вып. 6. – С. 1294 – 1297.

59 Майоров В.Е. Тригонометрические поперечники соболевских классов W_p^r в пространстве L_q // Матем. заметки, – 1986, – Т. 40, вып. 2, – С. 161 – 173.

60 Makovoz Y. On trigonometric n-widths and their generalization // J. Approx. Theory 41 (1984), № 4, 361–366.

61 Магарил-Ильяев Г.Г. Тригонометрические поперечники соболевских классов функций на R^n // Тр. МИАН СССР, 1988, том 181, страницы 147–155.

ҚОСЫМША А

Диссертация тақырыбы бойынша жарияланған жұмыстар тізімі

1. Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Анизотропты Лоренц кеңістігіндегі метрикасындағы аралас метрикалы Никольский-Бесов класындағы тригонометриялық көлденеңнің реті. Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.-2020. – №1(97). Б. 17-26

2. Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Интерполяционная теорема для пространств типа Никольского-Бесова со смешанной метрикой. Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.-2020. – №4(100). Б. 33-42.

3. Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Жалпыланған аралас тегістілігі бар Никольский-Бесовтың анизотропты кеңістіктері үшін енгізу теоремалары. Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.-2021. – №4(104). Б. 28-34.

4. Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Анизотропты Лоренц кеңістігінің метрикасындағы Никольский-Бесов класының ортопроекция енінің ретін бағалау. Математика ғылымдарының журналы, Том. 264, № 5, Шілде, 2022.– Б. 552-561.

5. Қ.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазы. Жалпыланған аралас тегістілігі бар Никольский-Бесов кеңістіктеріндегі функциялар үшін іздер және жалғасулар теоремалары. Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.-2022.- № 4 (108), Б. 42-50.

6. Е. Төлеуғазы, Қ.Е. Кервенев. Үстем аралас туындысы және аралас метрикасы бар анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктері және анизотропты Лоренцкеңістіктері үшін ену теоремаларының жетілдірілмейтіндігі туралы// Қарағанды университетінің Хабаршысы.-Математика сериясы.- 2024.- 114 (2), Б.186-196 (Web of Science (ESCI Q2), Scopus 46%) DOI10.31489/2024M2/186-196.

7. Е. Төлеуғазы, Қ.Е. Кервенев, С.А. Искаков. Жалпыланған аралас тегістілігі бар Никольский-Бесов кеңістігінің шекаралық функциялары.// Абай атындағы ҚазҰПУ-нің Хабаршысы, «Физика-математика ғылымдары» сериясы.- 2025.- 1(89), Б. 76-83. (ҒЖБССҚК). DOI: 10.51889/2959-5894.2025.89.1.007.

8. К.А. Бекмағанбетов, Қ.Е. Кервенев, Е.Д. Нурсултанов. Басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский-Бесов кеңістігі: интерполяциялық қасиеттері, ену теоремалары, іздер және жалғасу теоремалары // Eurasian Mathematical Journal, - 2025. -№2 (16), pp. 30–41. (Scopus, процентиль - 67) DOI: <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2025-16-2-30-41>.

Халықаралық конференциялар материалдарында:

1. Бекмағанбетов К.А., Кервенев К.Е., Төлеуғазы Е. Теоремы вложения для пространств Никольского-Бесова со смешанной метрикой// Традиционная межд. апрельская науч. конф. в честь Казахстанского дня работников науки, посвященная 75-летию академика Т.Ш.Кальменова: Тезисы докладов.-Алматы, 2021.- С.20-21.

2. Бекмаганбетов К.А., Кервенев К.Е., Толеугазы Е. Интерполяционные свойства и теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского–Бесова с обобщенной смешанной гладкостью.// Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 30-летию Независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала Московского университета. Нур-Султан, 4 июня 2021 г.-С. 72-76.

3. Бекмаганбетов К.А., Кервенев К.Е., Толеугазы Е. Теоремы о следах и продолжении для пространств Никольского-Бесова со смешанной метрикой в анизотропных пространствах Лоренца// Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. Материалы IX международной научной конференций. Актобе, 24-28 мая 2022 г. С. 119-121.

4. Бекмаганбетов К.А., Кервенев К.Е. Пространства Никольского-Бесова с доминирующей смешанной производной и со смешанной метрикой: теоремы вложения разных метрик и измерений.//Международная научно-практическая конференция «анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» посвященная 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук, профессора Т.И. Аманова. Астана, 22-23 июня 2023 г. С. 21-24.